压轴小题

函数与导数

考向 1 函数的图象与性质综合

1. （宁德质检，文11）已知可导函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足 $f(x+4)=f(-x)$，$(x-2)f'(x)<0$，则对任意的 $x_1<x_2$，“$f(x_1)<f(x_2)$”是“$x_1+x_2<4$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】（浙江宁波赖庆龙）

由 $f(x+4)=f(-x)$，得函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，再由 $(x-2)f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，即函数 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，当 $x<2$ 时，$f'(x)>0$，即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增.因为 $x_1<x_2$，且 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $x_1<x_2<2$ 或 $x_1<2<x_2$ 且 $2-x_1>x_2-2$，可得 $x_1+x_2<4$，又当 $x_1+x_2<4$ 时，若 $x_1<x_2<2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$，若 $2-x_1>x_2-2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$，

综上“$f(x_1)<f(x_2)$”是“$x_1+x_2<4$”的充要条件，故选项C正确.

2. （2020梅州5月质检，理11）设函数 $f(x)$ 定义域为全体实数，令 $g(x)=f(|x|)-|f(x)|$. 有以下6个论断：

① $f(x)$ 是奇函数时，$g(x)$ 是奇函数；

② $f(x)$ 是偶函数时，$g(x)$ 是奇函数；

③ $f(x)$ 是偶函数时，$g(x)$ 是偶函数；

④ $f(x)$ 是奇函数时，$g(x)$ 是偶函数；

⑤ $g(x)$ 是偶函数；

⑥对任意的实数 x，$g(x)\le 0$.

那么正确论断的编号是

A. ③④　　B. ①②⑥　　C. ③④⑥　　D. ③④⑤

【答案】A

【解析】（湖北武汉黄祥华）

当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(-x)=-f(x)\ \therefore g(-x)=f(|-x|)-|f(-x)|=f(|x|)-|-f(x)|=g(x)$，从而 $g(x)$ 为偶函数，因此①错④对；当 $f(x)$ 为偶函数时，$f(-x)=f(x)\ \therefore g(-x)=f(|-x|)-|f(-x)|=f(|x|)-|f(x)|=g(x)$，从而 $g(x)$ 为偶函数，因此②错③对；当 $f(x)=x+1$ 时，$g(x)=|x|+1-|x+1|$，$\because g(-1)=2>0$，$g(1)=0$，$\therefore g(-1)\ne g(1)$，所以 $g(x)$ 不是偶函数，因此⑤错，⑥错.

3. （2020年山东5月质量检测，12）（多选）对于函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\pi x, & x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]\\ \dfrac{1}{2}f(x-2), & x\in\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)\end{cases}$，下列结论正确的是（　）

A. 任取 x_1，$x_2\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le 2$ 恒成立；

B. 对于一切 $x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，都有 $f(x)=2^k f(x+2k)$（$k\in\mathbf{N}^*$）；

C. 函数 $y=f(x)-\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 有3个零点；

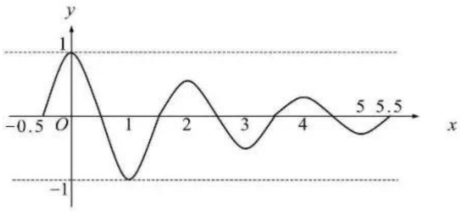
D. 对于任意 $x>0$，不等式 $f(x)\le\dfrac{k}{x}$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

【答案】ABC

【解析】（江西于都李先源）

压轴小题

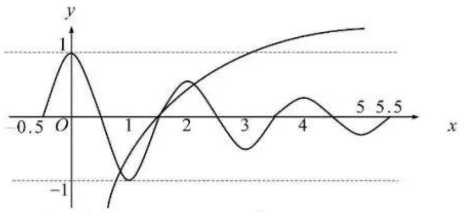
作出 $f(x)$ 的大致图象如下：



对于A，$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\right|=2$；

对于B，$f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)$，即 $f(x)=2f(x+2)=2^2f(x+2\cdot 2)=\cdots=2^kf(x+2k)$；

C.再作出 $g(x)=\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 的图象看交点的个数，注意到 $g(1)>f(1)$，$g\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)$，$g(2)<f(2)$，所以它们有三个交点。



D.取 $k=\frac{1}{2}$，当 $x=2$ 时，$f(2)=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$，不满足 $f(x)\le\frac{k}{x}$ 恒成立，故错误.

综上，选ABC.

4. **（长郡十五校高三第二次联考，理12）** 已知函数 $f(x)=ae^x-3x^2(a\in\mathbf{R})$，若 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值，则 a 的取值范围为（　　）

A. $a<\frac{6}{e}$　　B. $a\ge\frac{12}{e^2}$　　C. $a\le 0$　　D. $\frac{12}{e^2}<a<\frac{6}{e}$

【答案】C

【解析】（江西抚州杨敏）

$\because f'(x)=ae^x-6x=e^x\left(a-\frac{6x}{e^x}\right)$，令 $g(x)=\frac{6x}{e^x}$，$\therefore g'(x)=\frac{6(1-x)}{e^x}$，

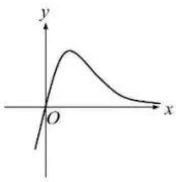
$\therefore x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增；$x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减；

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=\frac{6}{e}$，$\therefore$ 当 $a\ge\frac{6}{e}$ 时，$f'(x)\ge 0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不成立；

当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，成立；当 $0<a<\frac{6}{e}$ 时，$a-\frac{6x}{e^x}=0$ 有两个根 x_1，x_2 $(0<x_1<x_2)$

$\because$ 当 $x<x_1$ 时，$a-\frac{6x}{e^x}>0$，$f'(x)>0$；当 $x_1<x<x_2$ 时，$a-\frac{6x}{e^x}<0$，$f'(x)<0$

当 $x>x_2$ 时，$a-\frac{6x}{e^x}>0$，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $[0,x_1],[x_2,+\infty)$ 上单调递增，在 $[x_1,x_2]$ 上单调递减，显然不成立.



压轴小题

5. （四省名校联考，文12）函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 $(-\infty,t]$ 上的单调减函数，且 $f(t)=g(t)=M$，若对于任意 $k>M$，存在 x_1、x_2 $(x_1>x_2)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=k$ 成立，则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,t]$ 上的"被追逐函数"，若 $f(x)=x^2$，下述四个结论：① $g(x)=-2x-1$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的"被追逐函数"；②若 $g(x)$ 和函数 $h(x)=2^x-1$ 关于 y 轴对称，则 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的"被追逐函数"；③若 $g(x)=\ln(-x)+m$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的"被追逐函数"，则 $m=1$；④存在 $m\geq1$，使得 $g(x)=\frac{1}{x}+m$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的"被追逐函数"，其中正确的命题个数为（　　）

A. ②④　　B. ①④　　C. ②③　　D. ①③

【答案】D

【解析】（云南昆明郐书仙）

对于①，$f(x)=x^2$ 和 $g(x)=-2x-1$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减，且 $f(-1)=g(-1)=1$，若 $g(x)=-2x-1$ 是 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的"被追逐函数"，则对于任意 $k>1$，存在 x_1，x_2 $(x_1>x_2)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=k$ 成立，即 $x_1^2=-2x_2-1=k\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\sqrt{k}\\x_2=-\frac{k+1}{2}\end{cases}$，此时 $\sqrt{k}<\frac{k+1}{2}\Rightarrow k<\frac{(k+1)^2}{4}$，构造函数 $h(x)=x-\frac{(x+1)^2}{4}(x>1)$，则 $h'(x)=1-\frac{x+1}{2}<0$，则 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，又 $h(1)=0$，则 $h(x)<0$ 恒成立，即 $x<\frac{(x+1)^2}{4}$，故对任意 $k>1$，存在 x_1，x_2 $(x_1>x_2)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=k$ 成立，故①正确；

对于②，由题意 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$，则 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减，且 $f(-1)=g(-1)=1$，若 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$ 是 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的"被追逐函数"，则对于任意 $k>1$，存在 x_1，x_2 $(x_1>x_2)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=k$ 成立，即 $x_1^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-1=k\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\sqrt{k}\\x_2=\log_{\frac{1}{2}}(k+1)\end{cases}$，当 $k=100$ 时，不存在 x_1，x_2 $(x_1>x_2)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=k$ 成立，故②错误

对于③，若 $g(x)=\ln(-x)+m$ 是 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的"被追逐函数"，此时必有 $f(-1)=g(-1)=1$，解得 $m=1$，当 $m=1$ 时，$g(x)=\ln(-x)+1$ 和 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减，若 $g(x)=\ln(-x)+1$ 是 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的"被追逐函数"，则对于任意 $k>1$，存在 x_1，x_2 $(x_1>x_2)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=k$ 成立，即 $x_1^2=\ln(-x_2)+1=k\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\sqrt{k}\\x_2=-e^{k-1}\end{cases}$，即 $-\sqrt{k}>-e^{k-1}\Rightarrow\sqrt{k}<e^{k-1}\Rightarrow k<e^{2k-2}$，构造函数 $h(x)=x-e^{2x-2}$，则 $h'(x)=1-2e^{2x-2}<0$，则 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，又 $h(1)=0$，则 $h(x)<0$ 恒成立，即 $x<e^{2x-2}$，故对任意 $k>1$，存在 x_1，x_2 $(x_1>x_2)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=k$ 成立，故③正确；

对于④，当 $x\in(-\infty,-1]$ 时，$g(x)=\frac{1}{x}+m\in[-1+m,m)$，而当 $x\in(-\infty,-1]$ 时，$f(x)=x^2\in[1,+\infty)$，由 k 的任意性，不存在 $m\geq1$，使得 $g(x)=\frac{1}{x}+m$ 是 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的"被追逐函数"，故④错误；

故选D.

6. （2020四省名校联考，理12）定义矩阵的运算如下：$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，已知函数

$$f(x)=\begin{cases}\begin{vmatrix}x^{-1}+1 & \ln(-x)\\1 & \ln(-x)\end{vmatrix},x<0\\\begin{vmatrix}x^{-1}+1 & \ln x\\1 & \ln x\end{vmatrix},x>0\end{cases}$$

，以下命题正确的是（　　）

压轴小题

①对 $\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$、都有 $f(-x)+f(x)=0$；②若 $\varphi(x)=f(x)\sin x$，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，总存在非零常数 T，使得 $\varphi(x+T)=\varphi(x)$；③若存在直线 $y=kx$ 与 $h(x)$ 的图象无公共点，且使 $h(x)$ 的图案位于直线两侧，此直线即称为函数 $h(x)$ 的分界线，则 $f(x)$ 的分界线的斜率的取值范围是 $(e^2,+\infty)$；④函数 $t(x)=f(x)-\sin x$ 的零点有无数个

A. ①③④　　B. ①②④　　C. ②③　　D. ①④

【答案】D

【解析】（云南昆明邹书仙）

由题知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(-x)}{x},x<0\\ \dfrac{\ln x}{x},x>0\end{cases}$，当 $x<0$ 时，$f(-x)=\dfrac{\ln(-x)}{-x}=-f(x)$，同理 $x>0$ 时，$f(-x)=-f(x)$，即①正确；

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$；$f'(x)>0\Rightarrow 0<x<e$，$f'(x)<0\Rightarrow x>e$，$f(x)$ 为奇函数，知 $f(x)$ 的增区间为 $(-e,0)$，$(0,e)$，减区间为 $(-\infty,-e)$，$(e,+\infty)$，则 $f(x)$ 不存在周期性，所以 $\varphi(x)$ 不是周期函数，所以②错误；

当 $x>0$，过原点作 $f(x)$ 的切线，设切点为 $\left(x_0,\dfrac{\ln x_0}{x_0}\right)$，则切线斜率 $k=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}$，即 $y-\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}(x-x_0)$，由此直线过原点得 $x_0=\sqrt{e}$，即 $k=\dfrac{1}{2e}$，结合 $f(x)$ 在区间 $(0,e)$ 上单调递增，在区间 $(e,+\infty)$ 上单调递减，且 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，且 $f(x)>0$，可得 $x>0$ 时，$f(x)$ 的分界线的斜率的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2e},+\infty\right)$，又 $f(x)$ 为奇函数，可得 $x<0$ 时，$f(x)$ 的分界线的斜率的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2e},+\infty\right)$，所以分界线的斜率的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2e},+\infty\right)$，故③错误；

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，且 $f(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)=\sin x$ 有无数个解，故④正确；综上，选D

7.（昆明三诊一模，理16）定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)+f(1-x)=0$，当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$，给出下列四个结论：

①$|f(x)|<1$；

②若 $f(x_1)+f(x_2)=0$，则 $x_1+x_2=0$；

③函数 $f(x)$ 在 $(0,4)$ 内有且仅有3个零点；

④若 $x_1<x_2<x_3$，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则 x_3-x_1 的最小值为4.

其中，正确结论的序号是_______.

注：本题给出的结论中，有多个符号题目要求.全部选对得5分，不选或或有错选的0分，其他得3分.

【答案】①③

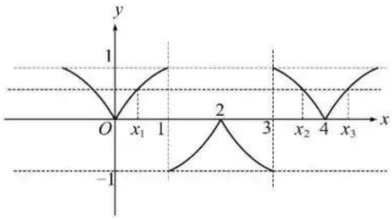
【解析】（云南版纳郑从胜）

因为偶函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)+f(1-x)=0$，则 $f(1+x)=-f(1-x)$，$\therefore f(x)$ 的图象关于 $(1,0)$ 对称.

根据题意画出如下示意图：

由图易得选项①③正确，②错误；若 $x_1<x_2<x_3$，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，x_3-x_1 的最小值大于4，故选项④错误.

压轴小题



8. **（THUSSAT2020年5月诊断，理16）** 已知定义在实数 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)>-2$，则不等式 $f(x-1)<x^2(3-2\ln x)+3(1-2x)$ 的解集为_______.

【答案】$(0,1)$

【解析】（陕西西安赵钊）

由奇函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)>-2$ 知：$f'(x)+2>0$，

故 $F(x)=f(x)+2x$ 为奇函数，且在 **R** 上为增函数，且 $F(0)=0$，

$f(x-1)<x^2(3-2\ln x)+3(1-2x)$ 等价于 $f(x-1)+2(x-1)<x^2(3-2\ln x)+1-4x$，

考虑到 $g(x)=x^2(3-2\ln x)+1-4x$，

且 $g'(x)=x^2\cdot\left(-\dfrac{2}{x}\right)+2x(1-2\ln x)-4=-4\ln x-4$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 为正，$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 为负，

故 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 递增，在 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 递减，

考虑到 $x\to 0$ 时 $g(x)$ 为正，$g(1)=0$，故当且仅当 $x\in(0,1)$ 时 $g(x)>0$，

故 $x\in(0,1)$ 时 $g(x)>0$，$F(x-1)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时 $g(x)<0$.

故原不等式的解集为 $(0,1)$.

9. **（2020南充诊断，理15）** 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-ax, x\le 0\\ 2x^3-ax^2+1, x>0\end{cases}$，若 $f(x)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_______.

【答案】$[0,3)$

【解析】（四川泸州刁如金）

（1）当 $x=0$ 时，$f(x)=2>0$ 恒成立，$a\in\mathbf{R}$；

（2）当 $x<0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，即 $2-ax>0$，解得 $a>\dfrac{2}{x}$ 恒成立，因为 $\dfrac{2}{x}\in(-\infty,0)$，所以 $a\ge 0$；

（3）当 $x>0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，即 $2x^3-ax^2+1>0$ 恒成立，即 $a<2x+\dfrac{1}{x^2}$，

令 $g(x)=2x+\dfrac{1}{x^2},(x>0)$，则 $g'(x)=2-\dfrac{2}{x^3}$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)\ge g(1)=3$，所以 $a<3$．综上可得 $0\le a<3$．故答案为 $[0,3)$．

考向 2 交点与零点问题

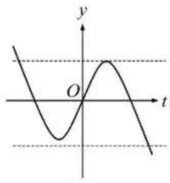
1. **（莆田市第二次检测，理12）** 已知函数 $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^3}$，若 $g(x)=f^2(x)-(a-3)f(x)-3a$ 有四个不同的零点，其中恰有一个为负，三个为正，则实数 a 的取值范围为（　）

A．$(-2,0)\cup(0,2)$　　B．$(-1,e)$　　C．$(0,2)$　　D．$(-2,0)$

【答案】C

【解析】（湖北雷誉）

设由 $g(x)=0$ 得 $(f(x)-a)(f(x)+3)=0$，则 $f(x)=-3$ 或 $f(x)=a$，又 $f(x)=3\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}$，令 $t=\frac{1}{x}$，则 $f(t)=-t^3+3t$，图像如下，则 $f(t)=-3$ 对应一个正解，$f(t)=a$ 对应1个负解，2个正解，结合图像可知 $a\in(0,2)$，选C.



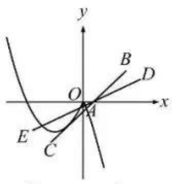
2. （2020铜仁市第二次模拟，理12）已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-e^x, x\ge 0\\ \frac{1}{2}x^2+2x, x<0\end{cases}$，函数 $g(x)=k(x-1)$，若方程 $f(x)=g(x)$ 恰好有三个实数解，则实数 k 的取值范围为（　）

A. $\left[1-\sqrt{5},0\right)$　B. $\left(0,1+\sqrt{5}\right)$　C. $\left(0,3-\sqrt{5}\right]$　D. $\left(0,3-\sqrt{5}\right)$

【答案】D

【解析】（湖北襄阳殷勇）

由题意，作图如图，方程 $f(x)=g(x)$ 恰好有三个实数解就转化为求曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=g(x)$ 恰有三个不同交点时，求实数 k 的取值范围，直线 $y=g(x)$ 过点 $(1,0)$，斜率为 k，当 $x<0$ 时，$f'(x)=x+2$，设直线 $y=g(x)$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切时切点坐标为 $\left(x_0,\frac{1}{2}x_0^2+2x_0\right)$，则切线方程为 $y-\left(\frac{1}{2}x_0^2+2x_0\right)=(x_0+2)(x-x_0)$，把点 $(1,0)$ 代入方程可得 $x_0=1-\sqrt{5}$ 或 $x_0=1+\sqrt{5}$（舍），此时 $k=3-\sqrt{5}$，由图知所求的范围为 $(0,3-\sqrt{5})$，所以选D.



3. （2020深圳线下调研，文12）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left|\log_2 x+2\right|, 0<x\le 1\\ 3-\sqrt{x}, x>1\end{cases}$ 若存在互不相等的正实数 x_1，x_2，x_3，满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $x_1<x_2<x_3$，则 $x_3\cdot f(x_1)$ 的最大值为（　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. 4　　C. 9　　D. 36

【答案】B

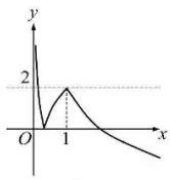
【解析】（浙江湖州卢骏杨）

【解法1】（图象＋求导）作图，如图所示，可得 $0<f(x_3)<2$，$\therefore x_3\in(1,9)$，

$\because f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，$\therefore x_3\cdot f(x_1)=x_3\cdot f(x_3)=x_3\left(3-\sqrt{x_3}\right)$，

令 $t=\sqrt{x_3}$，$\therefore$ 令 $g(x)=x_3\cdot f(x_1)$，则 $g(t)=x_3\cdot f(x_1)=x_3\left(3-\sqrt{x_3}\right)=-t^3+3t^2$，$t\in(1,3)$，

$\therefore g'(t)=-3t^2+6t$，$\therefore$ 当 $t=2$ 时，$g(t)_{\max}=4$.



【解法2】（均值不等式）$x_3\cdot f(x_1)=x_3\left(3-\sqrt{x_3}\right)=4\left[\frac{1}{2}\sqrt{x_3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x_3}\left(3-\sqrt{x_3}\right)\right]\le 4\left(\frac{3}{3}\right)^3=4$.

压轴小题

4. **（THUSSAT2020年5月诊断，理12）**设 $f(x)$ 为定义在 $[-1,1]$ 上的偶函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=|1-2x|$，则方程 $f(f(x))=\dfrac{x^2}{2}$ 的实数解的个数为（　　）

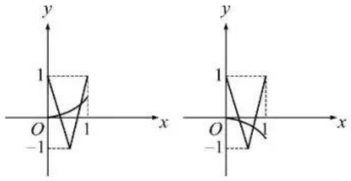
A．8　　　　B．6　　　　C．4　　　　D．2

【答案】A

【解析】（陕西西安赵钊）

由题：$f(f(x))$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ 为偶函数，$f(f(0))=f(1)=1$，$g(0)=0$，故0不是方程的解.下只用考虑 $x>0$ 的情形即可：方程 $f(f(x))=|1-2|1-2x||=\dfrac{x^2}{2}$ 等价于 $2|1-2x|-1=\pm\dfrac{x^2}{2}$，其中 $x>0$，

数形结合得：$y=2|1-2x|-1$ 与 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 有两个交点，$y=2|1-2x|-1$ 与 $y=-\dfrac{x^2}{2}$ 有两个交点，



故方程 $f(f(x))=\dfrac{x^2}{2}$ 的实数解的个数为8.

5. **（石家庄模拟，文12）**已知函数 $f(x)$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$，均满足 $f(x)=f(2-x)$，当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\begin{cases}\ln x+2, 0<x\le 1\\ e^x, x\leqslant 0\end{cases}$，（其中e为自然对数的底数），若存在实数 a，b，c，d（$a<b<c<d$）满足 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$，则 $(a+b+c+d)b-e^a$ 的取值范围为（　　）

A. $\left(\dfrac{4}{e}-1,4\right)$　　　　B. $\left[\dfrac{4}{e}-1,\dfrac{4}{e^2}\right)$　　　　C. $\left(\dfrac{4}{e^2},4\right)$　　　　D. $\left[2\ln 2-1,\dfrac{4}{e^2}\right)$

【答案】D.

【解析】（湖北荆州张凡）

由 $f(x)=f(2-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，如图，因此 $a+d=b+c=2$，

所以 $a+b+c+d=4$，又因为 $f(a)=f(b)$，所以 $e^a=\ln b+2$，

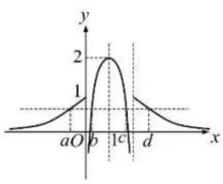
因此 $(a+b+c+d)b-e^a=4b-\ln b-2$，由题意知 $\dfrac{1}{e^2}<b\le\dfrac{1}{e}$，

令 $g(b)=4b-\ln b-2\left(\dfrac{1}{e^2}<b\le\dfrac{1}{e}\right)$，$g'(b)=4-\dfrac{1}{b}=\dfrac{4b-1}{b}$，令 $g'(b)=0$ 得 $b=\dfrac{1}{4}$，

故 $g(b)$ 在 $\left(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{4}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递增，故 $g(b)_{\min}=g\left(\dfrac{1}{4}\right)=2\ln 2-1$，

由 $g\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{4}{e^2}$，$g\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{4}{e}-1$，则 $g\left(\dfrac{1}{e^2}\right)-g\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{4}{e^2}-\dfrac{4}{e}+1=\dfrac{4+e^2-4e}{e^2}>0$，

故 $g(b)\in\left[2\ln 2-1,\dfrac{4}{e^2}\right)$，故选D.



6. **（2020高三石家庄5月模拟，理11）**已知函数 $f(x)$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$，均满足 $f(x)=f(2-x)$，当 $x\le 1$ 时，

压轴小题

$f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\le 1\\ e^x, & x\le 0\end{cases}$（其中e为自然对数的底数），若函数 $g(x)=m|x|-2-f(x)$，下列有关函数 $g(x)$ 的零点个数问题中正确的为

A．若 $g(x)$ 恰有两个零点，则 $m<0$

B．若 $g(x)$ 恰有三个零点，则 $\frac{3}{2}<m<e$

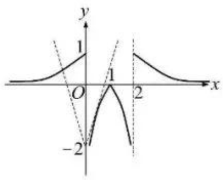
C．若 $g(x)$ 恰有四个零点，则 $0<m<1$

D．不存在 m，使得 $g(x)$ 恰有四个零点

【答案】B.

【解析】（湖北荆州张凡）

由 $f(x)=f(2-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，如图，令 $g(x)=0$，即 $m|x|-2=f(x)$，设 $h(x)=m|x|-2$，当 $x>0$ 时，$h(x)=mx-2$，设 $h(x)$ 与 $y=\ln x(x\le 1)$ 相切时的切点为 $P(x_0,\ln x_0)$，$y'=\frac{1}{x}$，则有 $\frac{\ln x_0+2}{x_0}=\frac{1}{x_0}$，解得 $x_0=\frac{1}{e}$，此时 $m=\frac{1}{x_0}=e$，当 $h(x)$ 过点 $(2,1)$ 时，$m=\frac{3}{2}$，故B选项正确.若 $g(x)$ 恰有两个零点，则 $m\le 0$ 或 $m=e$，故A选项错误；若 $g(x)$ 恰有四个零点，则 $0<m\le\frac{3}{2}$，故C、D选项错误.故选B.



7．（THUSSAT2020年5月诊断，文12）已知 m，n，$p\in\mathbf{R}$，若三次函数 $f(x)=x^3+mx^2+nx+p$ 有三个零点 a，b，c，且满足 $f(-1)=f(1)<\frac{3}{2}$，$f(0)=f(2)>2$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的取值范围是(　　)

A．$\left(\frac{1}{3},1\right)$　　　B．$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$　　　C．$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　　　D．$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

【答案】D.

【解析】（福建泉州林进伟）

由条件可知 $f(x)=x^3+mx^2+nx+p=(x-a)(x-b)(x-c)$，注意到左右两侧 x 与常数项的系数相等，

$\therefore ab+bc+ca=n$，$abc=-p$（本质是三次方程的韦达定理），由 $f(-1)=f(1)<\frac{3}{2}$，$f(0)=f(2)>2$，可得

$-1+m-n+p=1+m+n+p<\frac{3}{2}$，$p=8+4m+2n+p>2$，解得 $n=-1$，$m=-\frac{3}{2}$，$2<p<3$，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{p}\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

8．（2020届湘赣皖.长郡十五校高三二联，文12）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|, 0<x<e\\ -x+e+1, x\ge e\end{cases}$，若存在 $0<a<b<c$，使得 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 $Z=a+b+c$ 的最小值为（　　）

A．$\sqrt{3}-\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2}+e+1$　　　B．1

C．$\sqrt{5}-\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}+e+1$　　　D．无最小值

【答案】C

【解析】（湖南邵阳姜峰）

因为 $f(a)=f(b)=f(c)$，所以 $\ln|a|=\ln|b|=-c+e+1$，易知 $0<a<1<b<e<c$

所以 $-\ln a=\ln b=-c+\mathrm{e}+1$，所以 $a=\frac{1}{b}$，$c=-\ln b+\mathrm{e}+1$，

所以 $a+b+c=\frac{1}{b}+b-\ln b+\mathrm{e}+1(1<b<\mathrm{e})$，设 $g(x)=x+\frac{1}{x}-\ln x+\mathrm{e}+1(1<x<\mathrm{e})$，则

$g'(x)=1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-x-1}{x^2}=\frac{\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{x^2}$，所以 $g(x)$ 在 $\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 上递减，在 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\mathrm{e}\right)$ 上递增，

所以 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=\sqrt{5}-\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\mathrm{e}+1$，选C.

9.（池州五月检测，文12） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-(x+1)^2+2,(x\le 0)\\ |\log_2 x|,(x>0)\end{cases}$，若方程 $f(x)=a$ 有四个不同的解 x_1，x_2，x_3，x_4，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $x_3{}^2\cdot x_4+\frac{1}{x_3{}^2(x_1+x_2)}$ 的取值范围是

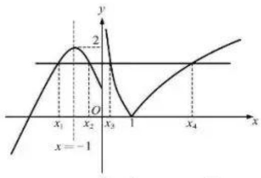
A. $\left(-\frac{7}{4},-\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\frac{3}{2},-\frac{7}{4}\right]$　　C. $\left[-\frac{7}{4},-\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-\frac{31}{4},-\frac{3}{2}\right]$

【答案】D

【解析】（湖北十堰陈强）

由题意得 $\begin{cases}x_1+x_2=-2\\ -\log_2 x=a\\ \log_2 x_4=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=2^{-a}\\ x_4=2^{a}\end{cases}$，$\therefore x_3{}^2\cdot x_4+\frac{1}{x_3{}^2(x_1+x_2)}=2^{-2a}\cdot 2^{a}+\frac{1}{2^{-2a}\cdot(-2)}=2^{-a}-\frac{1}{2\cdot 2^{-2a}}$

令 $2^{-a}=t$，由图知 $1<a\le 2$，所以 $\frac{1}{4}<t\le\frac{1}{2}$，构造函数 $h(t)=t-\frac{1}{2t^2}$，求导知 $h'(t)=1+\frac{1}{t^3}>0$，所以 $h(t)$ 在 $\frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}$ 单调递增，所以 $h(t)\in\left(h\left(\frac{1}{4}\right),h\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left(-\frac{31}{4},-\frac{3}{2}\right]$ 即 $x_3{}^2\cdot x_4+\frac{1}{x_3{}^2(x_1+x_2)}$ 的范围是 $\left(-\frac{31}{4},-\frac{3}{2}\right]$



10.（湖北八校第二次联考，理15） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x,(0\le x\le 2)\\ 2\ln x,(2<x\le 4)\end{cases}$，若存在实数 x_1，x_2 满足 $0\le x_1<x_2\le 4$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 x_2-x_1 的最大值为_______.

【答案】$\mathrm{e}-2$

【解析】（四川攀枝花王凯）

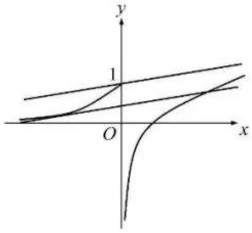
根据题意得 $x_1=2\ln x_2\in[0,2]$，$\therefore 0\le\ln x_2\le 1$，即 $1\le x_2\le\mathrm{e}$，又 $x_2>2$，$\therefore 2<x_2\le\mathrm{e}$ 此时 $x_2-x_1=x_2-2\ln x_2$，构造函数 $g(x)=x-2\ln x$，以判断函数 $g(x)$ 在 $x\in[2,\mathrm{e}]$ 上单调递增，即 $x_2-x_1=g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\mathrm{e}-2$

11.（2020马鞍山二模，理15） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x,x\le 0\\ \ln x,x>0\end{cases}$，$g(x)=f(x)-\frac{1}{\mathrm{e}^2}x-b$（e为自然对数的底数），若函数 $g(x)$ 有且只有三个零点，则实数 b 的值为_______.

【答案】$\frac{3}{\mathrm{e}^2}$ 或1

【解析】（四川凉山罗永云）

令 $g(x)=0$，则 $f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}x+b$，作出 $y=\frac{1}{\mathrm{e}^2}x+b$ 与 $y=f(x)$ 的图像如图：



①由图可知，当直线 $y=\frac{1}{e^2}x+b$ 过 $(0,1)$ 且与 $y=\ln x$ 相切时，满足条件，此时设切点为 (x_1,y_1)，则 $\begin{cases} y_1=\ln x_1 \\ y_1=\frac{1}{e^2}x_1+b \\ \frac{1}{x_1}=\frac{1}{e^2} \end{cases}$，

解得 $b=1$；

②当直线 $y=\frac{1}{e^2}x+b$ 与 $y=e^x$ 相切时，满足条件，此时设切点为 (x_2,y_2)，则 $\begin{cases} y_2=e^{x_2} \\ y_2=\frac{1}{e^2}x_2+b \\ e^{x_2}=\frac{1}{e^2} \end{cases}$，解得 $b=\frac{3}{e^2}$.

综上所述，实数 b 的值为：$\frac{3}{e^2}$ 或1.

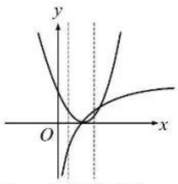
12.（宁德质检，文16） 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \log_2 x, 0<x<a \\ x^2-2x+1, x\ge a \end{cases}$，若存在实数 m，使得方程 $f(x)-m=0$ 有两个不相等的实数根，则 a 的取值范围是________.

【答案】$(0,1)\cup(1,2)$

【解析】（浙江宁波赖庆龙）

由题意知，即存在实数 m，使函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 有两个不同交点，

如图所示，易知 $0<a<1$ 或 $1<a<2$ 符合题意.



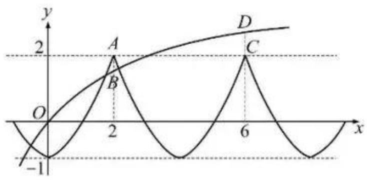
13.（2020年济宁5月模拟，16） 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(2-x)=f(2+x)$，且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=2^x-2$.若函数 $g(x)=f(x)-\log_a(x+1)$（$a>0$ 且 $a\ne1$）在区间 $(-1,9]$ 内恰有三个不同零点，则实数 a 的取值范围是_______.

【答案】$\left(\frac{1}{9},\frac{1}{5}\right)\cup\left(\sqrt{3},\sqrt{7}\right)$

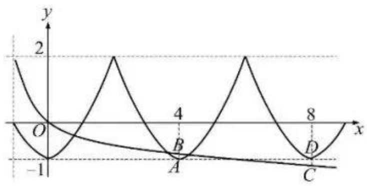
【解析】（江西于都李先源）

因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，又 $f(2-x)=f(2+x)$，则 $f(-x)=f(4+x)$，所以 $f(x)=f(4+x)$，所以函数 $f(x)$ 是以4为周期的函数，作出 $y=f(x)$ 及 $y=\log_a(x+1)$ 在区间 $(-1,9]$ 的图象如图所示，

（1）当 $a>1$ 时，此时，恰有三个不同零点，则 $\begin{cases} y_A>y_B \\ y_D>y_C \end{cases}$，即 $\begin{cases} 2>\log_a 3 \\ \log_a 7>2 \end{cases}$，解得 $\sqrt{3}<a<\sqrt{7}$，



（2）当$0<a<1$时，此时，恰有三个不同零点，则$\begin{cases} y_A<y_B \\ y_D>y_C \end{cases}$，即$\begin{cases} \log_a 5>-1 \\ \log_a 9<-1 \end{cases}$，解得$\frac{1}{9}<a<\frac{1}{5}$，



综上实数a的取值范围是$\left(\frac{1}{9},\frac{1}{5}\right)\cup\left(\sqrt{3},\sqrt{7}\right)$.

14. **（宁德质检，理16）** 如图，已知函数$f(x)=\begin{cases} xe^{x+1}, x\le 0 \\ \frac{2x}{x^2+1}, x>0 \end{cases}$若关于$x$的不等式$f^2(x)-2af(x)+2+a\le 0$的解非空，且为有限集，则实数$a$的取值集合为________.

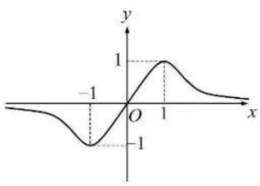
【答案】$a=\{-1,3\}$

【解析】（四川成都夏桎）

当$x\le 0$时$f'(x)=(x+1)e^{x+1}$，所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，$(-1,0)$上单调递增，

当$x>0$时$f(x)=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}$，易得$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，$(1,+\infty)$单调递减.

画出$f(x)$草图：



$f^2(x)-2af(x)+2+a\le 0$，$\Delta=4a^2-4a-8$，$\Delta\ge 0$，即$a^2-a-2\ge 0$，解得$a\le -1$或者$a\ge 2$，

①当$\Delta=0$时$a=-1$，$a=2$，a: $a=-1$时$f(x)=-1$，只有一个解，b: $a=2$时$f(x)=2$无解，

所以$a=-1$

②当$\Delta>0$解得$a<-1$，$a>2$，$a-\sqrt{a^2-a-2}\le f(x)\le a+\sqrt{a^2-a-2}$，

a: 当$a<-1$时$a-\sqrt{a^2-a-2}<-1$，要符合题意必有$a+\sqrt{a^2-a-2}=-1$无符合要求的解，

b: 当$a>2$时$a+\sqrt{a^2-a-2}>2$，要符合题意必要有$a-\sqrt{a^2-a-2}=1$解得$a=3$，

综上$a=\{-1,3\}$.

15. **（广东一模，文16）** 函数$f(x)=\sin\pi x+a\cos\pi x$满足$f(x)=f\left(\frac{1}{3}-x\right)$，当$x\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$时，方程$f(x)-m=0$恰有两个不等相等的实数根，则实数$m$的取值范围为_______.

【答案】$(-2,-1]\cup\left[\sqrt{3},2\right)$

【解析】（广西南宁安然）

压轴小题

$f(x)=\sin\pi x+a\cos\pi x=\sqrt{a^2+1}\sin(\pi x+\varphi)$， $\tan\varphi=a$，

由 $f(x)=f\left(\frac{1}{3}-x\right)$ 知 $f(x)$ 的对称轴 $x=\frac{1}{6}$，又因为 $f(x)$ 在对称轴上取得最值，

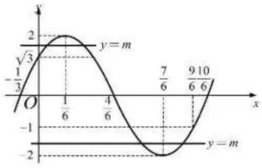
所以 $f\left(\frac{1}{6}\right)=\sqrt{a^2+1}\sin\left(\frac{1}{6}\pi+\varphi\right)=\pm\sqrt{a^2+1}$，当 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$ 时， $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

此时 $\tan\varphi=a=\sqrt{3}$， $f(x)_{\max}=2$， $f(x)_{\min}=-2$，又周期 $T=\frac{2\pi}{\pi}=2$，所以 $\frac{T}{4}=\frac{1}{2}$，

又对称轴与对称中心的距离最少相差 $\frac{1}{4}$ 个周期，所以 $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$， $\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$，

当 $x=0$ 时， $f(0)=\sqrt{a^2+1}\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，当 $x=\frac{3}{2}$ 时， $f\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{a^2+1}\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-1$

依题意，可得 $f(x)$ 的大致图像如图，所以，要使得方程 $f(x)-m=0$ 恰有两个不等相等的实数根，即 $f(x)$ 的图像与 $y=m$ 有两个不同的交点，所以 m 的取值范围为 $(-2,-1]\cup\left[\sqrt{3},2\right)$.



考向 3 导数及其应用

1. **(2020湖南金太阳理科12)** 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\sqrt{x}+m$， $g(x)=x^4-2x^3-x^2+2x+3$，若 $\forall x_1\in\mathbf{R}$， $\exists x_2\in(0,1)$， $f(x_2)<g(x_1)$，则 m 的取值范围为

A. $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,1]$

【答案】A

【解析】(河南洛阳刘友友)

$\forall x_1\in\mathbf{R}$， $\exists x_2\in(0,1)$， $f(x_2)<g(x_1)$ 的问题等价于 $f(x)_{\min}<g(x)_{\min}$， $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\sqrt{x}+m$ 中 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(0,1)$ 上单调递减， $-\sqrt{x}$ 在 $(0,1)$ 上也是单调递减，故 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\sqrt{x}+m$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，即值域为 $\left(m-\frac{1}{2},m+1\right)$. $g'(x)=4x^3-6x^2-2x+2=2\left(2x^3-3x^2-x+1\right)=2(2x-1)\left(x^2-x-1\right)$，令 $g'(x)=0$，得 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$， $\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 上单调递减， $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}\right)$， $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 处取得极小值，即最小值， $g\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)=2$，所以 $m-\frac{1}{2}<2$，得 $m<\frac{5}{2}$，或 $g(x)=x^4-2x^3-x^2+2x+3==\left(x^2-x-1\right)^2+2$，当 $\left(x^2-x-1\right)^2=0$ 时， $g(x)$ 取最小值2

2. **(重庆康德二诊，理16)** 若曲线 $y=ax+2\cos x$ 上存在两条切线相互垂直，则实数 a 的取值范围是_______.

【答案】 $-\left[\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

【解析】(安徽合肥吴威)

因为 $y'=a-2\sin x\in[a-2,a+2]$，由题知在区间 $[a-2,a+2]$ 内存在两数之积为 -1，故只需 $(a-2)(a+2)\le -1$，即 $-\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$.

3.（芜湖二模，理16） 若不等式 $a\sin x+\sin 3x-\frac{1}{8}\le 0$ 对任意 $x\in[0,\pi]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为______.

【答案】$\left(-\infty,-\frac{9}{4}\right]$

【解析】（安徽安庆王鹏）

当 $x=0$ 或 π 时，原不等式恒成立；当 $x\in(0,\pi)$，可变形得 $a\le\frac{\frac{1}{8}-\sin 3x}{\sin x}=4\sin^2x+\frac{1}{8\sin x}-3$，

令 $t=\sin x\in(0,1)$，$g(t)=4t^2+\frac{1}{8t}-3$，$g'(t)=8t-\frac{1}{8t^2}=\frac{(4t-1)(16t^2+4t+1)}{8t^2}$，$t\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，$g'(t)<0$，$g(t)\downarrow$；

$t\in\left(\frac{1}{4},1\right)$，$g'(t)>0$，$g(t)\uparrow$；故 $g(t)\ge g\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{4}$，$a\le g(t)_{\min}$，$\therefore a\le-\frac{9}{4}$，另解：$a\le\left(4\sin^2x+\frac{1}{8\sin x}-3\right)_{\min}$，

$4\sin^2x+\frac{1}{8\sin x}-3=4\sin^2x+\frac{1}{16\sin x}+\frac{1}{16\sin x}-3\ge 3\sqrt[3]{4\sin^2x\cdot\frac{1}{16\sin x}\cdot\frac{1}{16\sin x}}-3=-\frac{9}{4}$，（当且仅当 $\sin x=\frac{1}{4}$ 时取得）.

4.（2020宜春模拟，理16） 已知不等式 $x+m\ln x+\frac{1}{e^x}\ge x^m$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，则实数 m 的最小值为________.

【答案】$-e$

【解析】（江西宜春饶春林）

不等式 $x+m\ln x+\frac{1}{e^x}\ge x^m$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，即 $x+\frac{1}{e^x}\ge x^m-m\ln x=x^m-\ln x^m$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

即 $e^{-x}-\ln e^{-x}\ge x^m-\ln x^m$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，设函数 $f(x)=x-\ln x$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(e^{-x})\ge f(x^m)$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，当 $x>1$ 时，$e^{-x}\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，由题易知 $m<0$，

$\therefore x^m\in(0,1)$，$\therefore$ 要使 $f(e^{-x})\ge f(x^m)$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，只需 $e^{-x}\le x^m$，

不等式两边同取以 e 为底的对数，可得 $-x\le m\ln x$，$\therefore m\ge\frac{-x}{\ln x}$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

设函数 $g(x)=\frac{-x}{\ln x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}$，

当 $x\in(1,e)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)_{\max}=g(e)=-e$，$\therefore m\ge -e$，即 m 的最小值为 $-e$.

压轴小题

考向 4 构造函数

1. （池州5月检测，理12）已知定义在R上的函数 $f(x)$，其导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)=f(-x)-2\sin x$.且当 $x\geq 0$ 时，$f'(x)+\cos x<0$，则不等式 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)>f(x)+\sin x-\cos x$ 的解集为（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$　　C. $\left(-\infty,-\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $\left(-\frac{\pi}{4},+\infty\right)$

【答案】C

【解析】（安徽安庆王鹏）

令 $g(x)=f(x)+\sin x$，$g'(x)=f'(x)+\cos x<0$，所以 $g(x)=f(x)+\sin x$ 在R上单调递减，

$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)>f(x)+\sin x-\cos x\Rightarrow g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)>g(-x)\Rightarrow x+\frac{\pi}{2}<-x\Rightarrow x<-\frac{\pi}{4}$

所以不等式 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)>f(x)+\sin x-\cos x$ 的解集为 $\left(-\infty,-\frac{\pi}{4}\right)$，故选C.

2. （2020马鞍山二模，文12）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，若 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，则关于 x 的不等式 $f(x)<\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x$ 的解集为（　　）

A. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$　　C. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

【答案】C

【解析】（云南昆明邹书仙）

$\because f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，$\therefore$ 构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$，$\therefore g(x)\downarrow$，$f(x)<\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos x$，

$\frac{f(x)}{\cos x}<\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}}$，即 $g(x)<g\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\therefore x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

3. （广东一模，理12）已知 $f(x)$ 是定义在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的奇函数，$f(1)=0$，且当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)+f'(x)\tan x>0$，则不等式 $f(x)<0$ 的解集为（　　）

A. $(-1,0)\cup\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $(-1,0)\cup(0,1)$

C. $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)\cup\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)\cup(0,1)$

【答案】D

【解析】（湖北武汉余嘉伦）

构造函数 $F(x)=f(x)\sin x$，$F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x=\cos x\left[f'(x)\tan x+f(x)\right]$.当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，因为 $\cos x>0$，$f(x)+f'(x)\tan x>0$，所以 $F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增.又 $F(1)=f(1)\sin 1=0$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$F(x)<0$，当 $x\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$F(x)>0$；而 $f(x)$ 是定义在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的奇函数，所以 $F(x)=f(x)\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是偶函数，所以当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$ 时，$F(x)>0$，当 $x\in(-1,0)$ 时，$F(x)<0$. $f(x)=\frac{F(x)}{\sin x}<0\Leftrightarrow\begin{cases}F(x)<0\\ \sin x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}F(x)>0\\ \sin x<0\end{cases}$，解得 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)\cup(0,1)$，故选项D正确.

三角函数与解三角形

考向 1 三角函数的图象与性质

1. （2020深圳线下调研，理11）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）在 $[1,2]$ 上有且仅有3个零点，其图象关于 $\left(\frac{1}{4},0\right)$ 和直线 $x=-\frac{1}{4}$ 对称，给出下列结论：① $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$；②函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有且仅有3个极值点；③函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$ 上单调递增；④函数 $f(x)$ 的最小正周期是2.其中所有正确命题的编号是（　）

A. ②③　　B. ①④　　C. ②③④　　D. ①②

【答案】A

【解析】（湖北武汉蔡绍明）

由题意得：$\frac{1}{4}\omega+\varphi=k_1\pi$，$-\frac{1}{4}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2}$，$k_1$，$k_2\in\mathbf{Z}$

$\therefore\omega=[2(k_1-k_2)-1]\pi$，$\therefore\omega=(2n-1)\pi$，$n\in\mathbf{Z}$

又 $\frac{2\pi}{\omega}\le 2-1\le\frac{4\pi}{\omega}$，$\therefore 2\pi\le\omega<4\pi$，$\therefore\omega=3\pi$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，$f(x)=\sin\left(3\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$

故结论①④错误；结论②③正确；故应选A.

2. （2020 湖南金太阳，文 12）已知函数 $f(x)=|1-4\sin x\cos x|$，现有下述四个结论：

① $f(x)$ 的最小正周期为 π；②曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称；

③ $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递增；④方程 $f(x)=\sqrt{2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 4 个不同的实根.

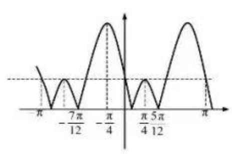
其中所有正确结论的编号是（　）

A.②④　　B.①③④　　C.②③④　　D.①②④

【答案】D

【解析】（河南洛阳刘友友）

$f(x)=|1-4\sin x\cos x|=\begin{cases}1-2\sin 2x, \sin 2x<\frac{1}{2}\\ 2\sin 2x-1, \sin 2x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$ 作出 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的图像，如图所示，可知①②④正确，选择 D 选项.



3. （2020 南充诊断，理 11）已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，函数 $g(x)=\sin(2x-\varphi)$，

则下列四个命题中，真命题有（　　）

①$y=g(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$成中心对称；

②若对$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$g(x_1)\le g(x)\le g(x_2)$，则$|x_1-x_2|$的最小值为π；

③将$y=g(x)$的图象向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位，可以得到$y=f(x)$的图象；

④$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得$|f(x_0)-g(x_0)|=\frac{1}{2}$．

A．①③　　B．②③　　C．①④　　D．②④

【答案】C

【解析】（四川泸州刁如金）

因为$f(x)=\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，所以$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=-\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

又$\varphi\in(0,\pi)$，故$\varphi=\frac{2}{3}\pi$，所以$g(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$，故①对；若对$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$g(x_1)\le g(x)\le g(x_2)$，则$|x_1-x_2|$

的最小值为半个周期$\frac{\pi}{2}$，故②错；$y=g(x)$的图象向左平移$\frac{2\pi}{3}$个单位，可以得到

$y=\sin\left[2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$的图象，故③错；对于④，

$$|f(x_0)-g(x_0)|=\left|\cos\left(2x_0+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(2x_0-\frac{2\pi}{3}\right)\right|=\left|-\frac{1}{2}\cos 2x_0-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x_0+\frac{1}{2}\sin 2x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x_0\right|$$

$=\left|\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\sin 2x_0\right|\in\left[0,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right]$，$\frac{1}{2}\in\left[0,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right]$，故④对．故选C．

考向2　三角函数中ω的范围问题

1．（2020宜春模拟，理11）已知定义在$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$上的函数$f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的最大值为$\frac{\omega}{5}$，则正实数$\omega$的取值个数最多为(　　)

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

【答案】C

【解析】（江西宜春饶春林）

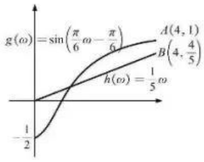
$\because$定义在$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$上的函数$f(x)$的最大值为$\frac{\omega}{5}$，$\therefore 0<\frac{\omega}{5}\le 1$，$\therefore 0<\omega\le 5$，$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$，$\therefore -\frac{\pi}{6}\le\omega x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$，

①当$\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}$，即$0<\omega\le 4$时，$f(x)_{\max}=\sin\left(\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\omega}{5}$，令$g(\omega)=\sin\left(\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)(0<\omega\le 4)$，$h(\omega)=\frac{\omega}{5}$，

由$g(\omega)$与$h(\omega)$的图象易知，存在唯一的$\omega\in(0,4]$，使得$\sin\left(\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\omega}{5}$；

②当$\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}>\frac{\pi}{2}$，即$4<\omega\le 5$时，$f(x)_{\max}=\frac{\omega}{5}=1$，$\therefore \omega=5$；

综上，正实数ω的取值个数最多为2个.



2. **（池州5月检测，理16）**已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\phi)(\omega>0)$满足$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$且$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$上单调，则$\omega$取值范围的个数有______个.

【答案】3

【解析】（安徽安庆王鹏）

由$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$可得，$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{T}{4}+\frac{nT}{2}(n\in \mathbf{N})\Rightarrow \omega=4n+2$，

$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$上单调可得$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\le\frac{T}{2}\Rightarrow 0<\omega\le 12$，

故可知ω可以取2，6，10三个值.

考向3 解三角形

1. **（重庆二诊康德，理11）**已知$\triangle ABC$的面积为1，角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$a\sin A-b\sin B=\sqrt{2}c\sin B+c\sin C$，$\cos B\cos C=\frac{3\sqrt{2}}{5}$，则$a=$（　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

【答案】D.

【解析】（安徽合肥吴威）

由正弦定理得：$a\sin A-b\sin B=\sqrt{2}c\sin B+c\sin C\Rightarrow a^2-b^2=\sqrt{2}bc+c^2$，由余弦定理得：$\cos A=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$A=\frac{3}{4}\pi$，

$\because \cos A=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C$，$\therefore \sin B\sin C=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

又$\because S=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C=1$，$\therefore R=\sqrt{5}$，$a=2R\sin A=\sqrt{10}$，故选D.

2. **（THUSSAT2020年5月诊断，文11）**已知$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a，b，c. 若$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4\cos C$，且$\cos(A-B)=\frac{1}{6}$，则$\cos C=$（　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{2}{3}$或$-\frac{3}{4}$　　D. 不存在

【答案】A.

【解析】（福建泉州林进伟）

由$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4\cos C$，得$\frac{a^2+b^2}{ab}=2\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\Rightarrow a^2+b^2=2c^2$，

所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}=\dfrac{2\sin^2 C}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}=\dfrac{2\sin^2 C}{\frac{1}{6}+\cos C}$，解得 $\cos C=\dfrac{2}{3}$.

3.（2020莆田市高中毕业班教学质量第二次检测，文12） 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $b=2$，$17\sin B(a\cos C+c\cos A)=16$，$\triangle ABC$ 的面积为2，则 $\triangle ABC$ 的周长为（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

【答案】B.

【解析】（江苏苏州陈海锋）

将 $a\cos C+c\cos A=b$，$b=2$ 代入 $17\sin B(a\cos C+c\cos A)=16$，可解得 $\sin B=\dfrac{8}{17}$，

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore \cos B=\dfrac{15}{17}$，$\because \triangle ABC$ 的面积为2，$\therefore \dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ac\times\dfrac{8}{17}=2$，有 $ac=\dfrac{17}{2}$

又 $\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$\therefore 4=a^2+c^2-2ac\times\dfrac{15}{17}$，将 $ac=\dfrac{17}{2}$ 代入化简有 $a^2+c^2=19$

故 $(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=19+17=36$，$\therefore a+c=6$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为8.故选B.

4.（广东一模，文11） 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A=60^\circ$，D 是边 BC 上一点，且 $BD=2DC$，$AD=2$，则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】（广西南宁安然）

在 $\triangle ADC$ 中，令 $\angle ADC=\theta$，$BD=2m$，$DC=m$，有 $b^2=2^2+m^2-2\cdot2\cdot m\cos\theta$　①

在 $\triangle ADB$ 中，有 $c^2=2^2+(2m)^2-2\cdot2\cdot2m\cos(\pi-\theta)$，即 $c^2=4+4m^2+8m\cos\theta$　②

联立①②得，$2b^2+c^2=12+6m^2$　③

在 $\triangle ABC$ 中，有 $b^2+c^2-2bc\cos A=(3m)^2$　④，由③④消去 m^2 得 $4b^2+c^2+2bc=36$，

又 $36=4b^2+c^2+2bc=(2b)^2+c^2+2bc\ge 2\cdot2b\cdot c+2bc$，解得 $bc\le 6$

所以 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A\le\dfrac{1}{2}\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

5.（宁德质检，文15） 在平面四边形 $ABCD$ 中，$BC\perp CD$，$\angle B=135^\circ$，$AB=3\sqrt{2}$，$AC=3\sqrt{5}$，$CD=5$，则 $AD=$________.

【答案】 $2\sqrt{10}$

【解析】（浙江宁波赖庆龙）

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，得 $\dfrac{3\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin\angle ACB}$，则 $\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，因为 $BC\perp CD$，则

$\cos\angle ACD=\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理，得

$AD^2=AC^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle ACD=45+25-2\cdot3\sqrt{5}\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=40$，所以 $AD=2\sqrt{10}$.

6.（湖北八校联考，文15） 已知在钝角三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a=4$，且 $\sin A=2\sin B\cos C$，则实数 b 的取值范围为________.

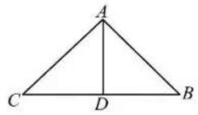
【答案】 $(2,2\sqrt{2})$

【解析】（湖北武汉周雪）

【解法1】 因为 $\sin A=2\sin B\cos C$，所以 $\sin(B+C)=2\sin B\cos C$，即 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\cos C$，所以 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=0$，即 $\sin(B-C)=0$，因为 $B,C\in(0,\pi)$，所以 $B=C$，所以 $b=c$ 进而可以得到 A 为钝角，所以 $-1<\cos A<0$.由余弦定理知道，所以 $b\in(2,2\sqrt{2})$

【解法2】 数形结合

压轴小题

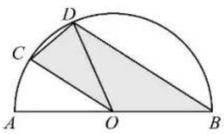


取 BC 边中点 D，连 AD，记 $\angle CAD=\theta$，则 $\angle A=\angle CAB=2\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

故 $\sin\theta\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$b=\frac{CD}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}\in\left(2,2\sqrt{2}\right)$.

考向 4 综合应用

1.（昆明三诊一模，理12） 如图，某公园内有一半圆形湖面，O 为圆心，半径为1千米，现规划在 $\triangle OCD$ 区域种荷花，在 $\triangle OBD$ 区域建水上项目，若 $\angle AOC=\angle COD$，且使四边形 $OCBD$ 面积最大，则 $\cos\angle AOC=$（　）



A．$\frac{\sqrt{17}-1}{8}$　　B．$\frac{\sqrt{33}-1}{8}$　　C．$\frac{\sqrt{17}-1}{6}$　　D．$\frac{\sqrt{33}-1}{6}$

【答案】B

【解析】（云南版纳郑从胜）

记 $\angle AOC=\angle COD=x$，则 $\angle BOD=\pi-x$，并设四边形 $OCBD$ 面积为 $S(x)$，考虑该面积可以分为 $\triangle OCD$ 和 $\triangle OBD$ 计算得：$S(x)=\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin\angle COD+\frac{1}{2}OB\cdot OD\cdot\sin\angle BOD=\frac{1}{2}(\sin x+\sin 2x)$，其中 $x>0$ 且 $\pi-2x>0$，

故 $0<x<\frac{\pi}{2}$．其导函数 $S'(x)=\frac{1}{2}(2\cos 2x+\cos x)=\frac{1}{2}(4\cos x^2+\cos x-2)=0$，$0<\cos x<1$，解得 $\cos x=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$，

验证 $\cos x=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$ 为唯一的极（最）大值点，故所求 $\cos\angle AOC=\cos x=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$，故本题选B．

2．（THUSSAT2020年5月诊断，理12） 已知当 $x\in[0,1]$ 时，不等式 $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$ 恒成立，则 θ 的取值范围为（　）

A．$k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<k\pi+\frac{5\pi}{12}$（$k$ 为任意整数）　　B．$k\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<k\pi+\frac{5\pi}{6}$（$k$ 为任意整数）

C．$2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}$（$k$ 为任意整数）　　D．$2k\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$（$k$ 为任意整数）

【答案】C

【解析】（陕西西安赵钊）

解法一：由于 $x\in[0,1]$，$x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$ 恒成立，

取 $x=0$，$\sin x>0$，$x=1$，$\cos\theta>0$ 得：$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

进一步将上式化为：$\frac{x}{1-x}\cos\theta+\frac{1-x}{x}\sin\theta>1$ 恒成立，

由 $\frac{x}{1-x}\cos\theta+\frac{1-x}{x}\sin\theta\geq 2\sqrt{\frac{x}{1-x}\cos\theta\cdot\frac{1-x}{x}\sin\theta}=2\sqrt{\cos\theta\cdot\sin\theta}$

只需 $2\sqrt{\cos\theta\cdot\sin\theta}>1\Rightarrow\sin 2\theta>\frac{1}{2}\Rightarrow 2\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)\Rightarrow\theta\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right)$

压轴小题

考虑到周期性，原题中$\theta\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{12},2k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)$.

将不等式$x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$，整理得：$(\sin\theta+\cos\theta+1)x^2-(2\sin\theta+1)x+\sin\theta>0$，

构造$f(x)=(\sin\theta+\cos\theta+1)x^2-(2\sin\theta+1)x+\sin\theta$，首先$f(0)>0$，$f(1)>0$得：$\sin\theta>0$且$\cos\theta>0$，

则$f(x)$的图象开口向上，且对称轴$x=\frac{2\sin\theta+1}{2(\sin\theta+\cos\theta+1)}\in(0,1)$的抛物线，

由题，若使不等式$x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$在$x\in[0,1]$恒成立则只需$\begin{cases}\sin\theta>0\\\cos\theta>0\\\Delta=1-4\sin\theta\cos\theta<0\end{cases}$，所以

$\theta\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{12},2k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，故选C.

3. **（2020重庆康德二诊，文11）**在锐角$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，$9a^2+9b^2=19c^2$，则$\frac{\tan A\tan B}{\tan C(\tan A+\tan B)}=$（　）

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{5}{9}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{7}{9}$

【答案】B

【解析】（上海奉贤沈健）

$$\frac{\tan A\tan B}{\tan C(\tan A+\tan B)}=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin C}{\cos C}\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}\right)}=\frac{\sin A\sin B\cos C}{\sin C\sin(A+B)}=\frac{\sin A\sin B\cos C}{\sin^2 C}=\frac{ab\cos C}{c^2}$$

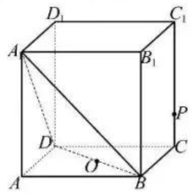
又$9a^2+9b^2=19c^2$，所以$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2=\frac{10}{9}c^2$，所以原式$=\frac{5}{9}$，故选B.

压轴小题

立体几何

考点 1 与空间角有关的计算

1. **（2020大连一模，理16）** 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点O为线段BD的中点.设点P在线段CC_1上，二面角A_1-BD-P的平面角为α，用图中字母表示角α为______；$\sin\alpha$的最小值是______.



【答案】 $\angle A_1OP$；$\frac{\sqrt6}{3}$.

【解析】（浙江嘉兴温福长）

由$PC\perp BD$，$OC\perp BD$，$PC\cap OC=C$，可得$BD\perp$平面OCP，所以$OP\perp BD$；

同理可证：$A_1O\perp BD$，所以$\angle A_1OP$是二面角A_1-BD-P的平面角.即$\alpha=\angle A_1OP$.假设$OP=tCC_1$（$0\le t\le 1$），

不妨令$CC_1=2$，则$\tan\angle A_1OP=\tan(\pi-\angle COP-\angle AOA_1)=-\tan(\angle COP+\angle AOA_1)=-\frac{\tan\angle COP+\tan\angle AOA_1}{1-\tan\angle COP\cdot\tan\angle AOA_1}$

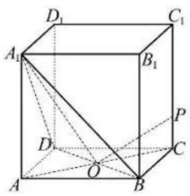
$=-\frac{\sqrt2+\sqrt2 t}{1-2t}=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{2t-1}$，

当$t=\frac12$时，无意义，此时$\angle A_1OP=\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=1$；

当$t\in\left(\frac12,1\right]$时，单调递减且$\tan\alpha>0$，故当$t=1$时，$\tan\alpha$最小，此时$\sin\alpha$最小，即$\sin\alpha=\frac{2\sqrt2}{3}$；

当$t\in\left[0,\frac12\right)$时，单调递减且$\tan\alpha<0$，故当$t=0$时，$\tan\alpha$最大，此时$\sin\alpha$最小，即$\sin\alpha=\frac{\sqrt6}{3}$.

综上，$\sin\alpha$的最小值是$\frac{\sqrt6}{3}$.

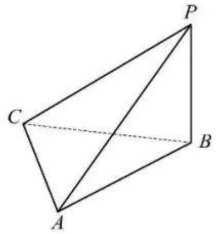


压轴小题

考点 2 空间几何体的外接球、内切球

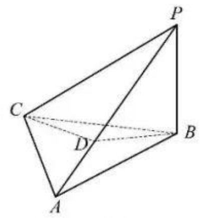
1. **（湖北八校联考，文11）** 如右图所示，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 R，且 PA 过球心，$\triangle PAB$ 围绕棱 PA 旋转 60° 后恰好与 $\triangle PAC$ 重合，若 $\angle PAB=60^\circ$，且三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\sqrt{3}$，则 $R=$（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2



【答案】D

【解析】（湖北武汉周雪）



依题意 $\triangle PAB\cong\triangle PAC$，过点 B 作 $BD\perp PA$ 于 D，连接 CD，则 $CD\perp PA$，所以 $\angle CDB$ 为二面角 $B-PA-C$ 的平面角，$\angle BDC=60^\circ$，进而可以得到 $\triangle BCD$ 为等边三角形.同时，因为 $CD\perp PA$，$BD\perp PA$，$CD\cap BD=D$，所以 $PA\perp$ 平面CBD.在 $\mathrm{Rt}\triangle PBA$ 中，$\angle PAB=60^\circ$，所以 $BD=\dfrac{PB\cdot AB}{PA}=\dfrac{\sqrt{3}R\cdot R}{2R}=\dfrac{\sqrt{3}R}{2}$.所以

$$V_{P-ABC}=V_{P-BCD}+V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AP=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2\cdot 2R=\frac{\sqrt{3}}{8}R^3=\sqrt{3}$$，解得 $R=2$.

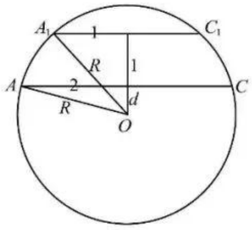
2. **（昆明三诊一模，理11）** 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的高为2，$AB=2\sqrt{2}$，过该棱锥高的中点且平行于底面 $ABCD$ 的平面截该正四棱锥所得截面为 $A_1B_1C_1D_1$，若底面 $ABCD$ 与截面 $A_1B_1C_1D_1$ 的顶点在同一球面上，则该球的表面积为（　　）

A. 20π　　B. $\dfrac{20\pi}{3}$　　C. 4π　　D. $\dfrac{4\pi}{3}$

【答案】A

【解析】（云南版纳郑从胜）

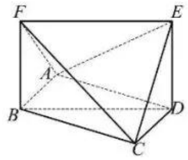
由题易知，球心 O 在该正四棱锥的高上，记 O 到底面 $ABCD$ 的距离为 d，则 O 到截面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离为 $d+1$，球半径为 R，由 $R^2=OA^2=OA_1^2$ 可得 $d^2+2^2=(d+1)^2+1^2$，解得 $d=1$，$R^2=5$，故球的表面积为 $S=4\pi R^2=20\pi$，故本题选A.



压轴小题

3. **（宁德质检，理11）** 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，四边形 $EFGB$ 为矩形，且平面 $ABCD$ 与平面 $EFBD$ 相互垂直，若多面体 $ABCDEF$ 的体积为 $\frac{16}{3}$，则该多面体外接球表面积的最小值为（　　）

A．16π　　B．12π　　C．8π　　D．6π



【答案】 B.

【解析】（四川成都夏桎）

由题意可得：$V_{ABCDEF}=2V_{C-BDEF}=2\times\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}a\times BF\times\sqrt{2}a=\frac{16}{3}$

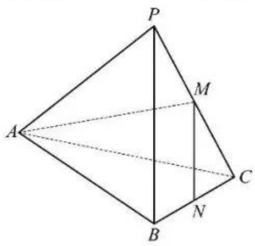
所以 $BF=\frac{8}{a^2}$，令外接圆半径为 R，球心为 $BDEF$ 的几何中心，

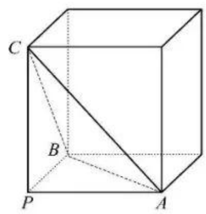
所以易得 $R=\sqrt{\left(\frac{4}{a^2}\right)^2+\frac{a^2}{2}}=\sqrt{\frac{16}{a^4}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}\geq\sqrt{3\sqrt[3]{\frac{16}{a^4}\times\frac{a^2}{4}\times\frac{a^2}{4}}}=\sqrt{3}$（当且仅当 $a=2$ 时取等号）

所以 $R=\sqrt{3}$ 外接球的表面积最小值为 12π

4. **（池州5月检测，理11）** 在正三棱锥 $P-ABC$ 中，M、N 分别是 PC、BC 中点，$AM\perp MN$，$PA=2\sqrt{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为

A．12π　　B．$9\sqrt{3}\pi$　　C．36π　　D．$36\sqrt{3}\pi$





【答案】C

【解析】（安徽安庆王鹏）

M、N 分别是 PC、BC 中点，可得 $MN//PB$，$AM\perp MN\Rightarrow PB\perp AM$ 由正三棱锥引理可知对棱互相垂直，

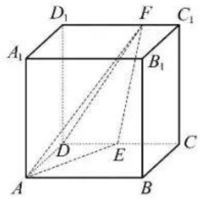
$$\begin{cases}PB\perp AM\\PB\perp AC\\AM\cap AC=A\end{cases}\Rightarrow PB\perp \text{平面 } PAC\Rightarrow PB\perp PA, PB\perp PC$$

再由 $\begin{cases}PA\perp PB\\PA\perp BC\\PB\cap BC=B\end{cases}\Rightarrow PA\perp$ 平面 PBC，$PA\perp PC$，有此可得正三棱锥 $P-ABC$ 为正方体的一角，

$R=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=3$，$S=4\pi R^2=36\pi$，故选C.

5. **（芜湖二模，理12）** 已知棱长为 $g(x)$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为∴中点，F 在线段 $f'(x)\geq 0$ 上运动，则三棱锥 $f(x)$ 的外接球的表面积最小值为

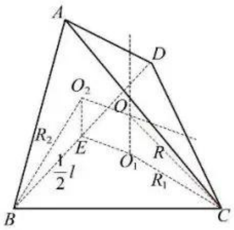
A．14π　　B．9π　　C．$\frac{545}{64}\pi$　　D．$\frac{525}{64}\pi$



【答案】C

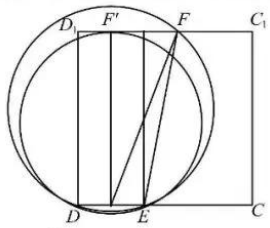
【解析】(安徽安庆王鹏)

有两个平面互相垂直的外接球半径求法：



如上图，三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=CD$，设 $BD=l$，O_1 与 O_2 分别为 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABD$ 的外心，R 为三棱锥 $x_1<x<x_2$ 的外接球半径，则此外接球半径为 $R=\sqrt{R_1^2+R_2^2-\frac{l^2}{4}}$.

证明：因为外接球在每个面内的投影为每个面所在三角形的外心，如上图所示，取 $x>x_2$ 的中点 E，则有四边形 $\therefore$ 为矩形，$f(x)$，$[0,x_1],[x_2,+\infty)$，在 $[x_1,x_2]$ 中，有勾股定理可得 ，即 $R=\sqrt{R_1^2+R_2^2-\frac{l^2}{4}}$.设 $\triangle ADE$，$\triangle DEF$ 的外接圆半径分别为 R_1 与 R_2，三棱锥 $F-ADE$ 的外接球半径为 R，



$DE=l$，则有 $R^2=R_1^2+R_2^2-\frac{l^2}{4}$，易得 $R_1=\frac{\sqrt{5}}{2}$，故当 R_2 最小时，R 最小，易知当以 DE 为弦的圆与 D_1C_1 相切时，此时 R_2 最小，经计算可得 $\cos\angle DF'E=\frac{15}{17}$，$\therefore\sin\angle DF'E=\frac{8}{17}\Rightarrow 2R_2=\frac{DE}{\sin\angle DF'E}\Rightarrow R_2=\frac{17}{16}$，

$\therefore R^2=\frac{5}{4}+\frac{289}{256}-\frac{1}{4}=\frac{545}{256}$，$S=4\pi R^2=\frac{545}{64}\pi$，故选C.

6. （2020佛山二模，理11）已知 A，B，C 是球 O 的球面上的三点，若 $\angle AOB=\angle AOC=60^\circ$，三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为1，则球 O 的表面积为（ ）

A. 4π　　B. 9π　　C. 16π　　D. 20π

【答案】C

【解析】(湖北襄阳殷勇)

思路一：$\triangle AOB$ 与 $\triangle AOC$ 都是边长为 R 的等边三角形，显然当平面 $AOB\perp$ 平面 AOC 时，三棱锥 $O-ABC$ 的体积取得最大值.最大值为 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}R=\frac{1}{8}R^3=1$，$\therefore R=2$

思路二：$\triangle AOB$ 与 $\triangle AOC$ 都是边长为 R 的等边三角形，取 OA 的中点 D，连接 BD,CD，则 $BD\perp OA$，$CD\perp OA$，

设 $\angle BDC=\theta\left(0<\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$，则点 B 到平面 AOC 的距离 $h=BD\bullet\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\theta$，

$\therefore V_{O-ABC}=V_{B-AOC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}R\times\sin\theta\le\frac{1}{8}R^3=1$，

$\therefore$ 三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大时，$R=2$

思路三：(这个思路最不可取，考试中有学生用，列上)：设球 O 的半径为 R，由题知 $OA=OB=OC=AB=AC=R$，

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r，$\angle ABC=\theta$，由正弦定理得：$2r=\frac{R}{\sin\theta}$，则三棱锥 $O-ABC$ 底面 ABC 上的高

$h=\sqrt{R^2-(\frac{R}{2\sin\theta})^2}=R\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\theta}}$，

又 $S_{\triangle ABC}=R^2\sin\theta\cos\theta$，所以 $V_{O-ABC}=\frac{1}{3}\bullet S_{\triangle ABC}\bullet h=\frac{1}{3}R^3\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\theta}}=\frac{1}{3}R^3\sqrt{-(\cos^2\theta-\frac{3}{8})^2+\frac{9}{64}}\le\frac{R^3}{8}=1$，

所以三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大时，$R=2$，所以选C.

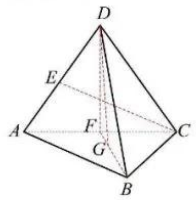
7. **（重庆康德二诊，理12）** 已知 A，B，C，D 四点均在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为6的等边三角形，点 D 在平面 ABC 上的射影为 $\triangle ABC$ 的中心，E 为线段 AD 的中点，若 $BD\perp CE$，则球 O 的表面积为（　　）

A．36π　　B．42π　　C．54π　　D．$24\sqrt{6}\pi$

【答案】D.

【解析】（安徽合肥吴威）

设 $\triangle ABC$ 的中心为 G，延长 BG 交 AC 于 F，则 F 为 AC 中点，连接 DF.由题知 $DG\perp$ 平面 $ABC,AC\perp GB$，由三垂线定理得 $AC\perp BD$，又 $BD\perp CE$，$\therefore BD\perp$ 平面 ACD，又 $D-ABC$ 为正三棱锥，故 DA，DB，DC 两两垂直，故三棱锥 $D-ABC$ 可看作以 DA，DB，DC 为棱的正方体的一部分，二者有共同的外接球，由 $AB=6$ 得 $DA=3\sqrt{2}$，故正方体外接球直径为 $3\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}$，所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=54\pi$，故选C.



8. **（2020马鞍山二模，理12）** 梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$\angle DAB=120^\circ$，$AC\perp BC$，$BC=2AD=2$，现将 $\triangle ABC$ 沿 AC 折起，使得 $B-AC-D$ 二面角的大小为 120°，若 A，B，C，D 四点在同一个球面上，则该球的表面积为（　　）

A．$\frac{16\pi}{3}$　　B．$\frac{40\pi}{3}$　　C．$\frac{64\pi}{3}$　　D．$\frac{76\pi}{3}$

【答案】C

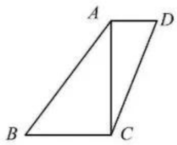
【解析】（四川凉山罗永云）

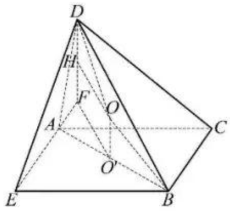
由 $AD//BC$，$\angle DAB=120^\circ$，$AC\perp BC$，$BC=2AD=2$ 可得 $\angle BAC=30^\circ$，$AB=2BC=4$，$AC=2\sqrt{3}$，

在平面 ABC 内作矩形 $ACBE$，即 $AE\perp AC$，而 $AD\perp AC$，则 $\angle EAD$ 为二面角 $B-AC-D$ 的平面角，即 $\angle EAD=120^\circ$，过点 D 作 $DF\perp$ 平面 ABC 于 F，则 $\angle DAF=60^\circ$，$\therefore DF=AD\cdot\sin60^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$AF=AD\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$，$\angle FAB=120^\circ$，取 AB 中点 O'，由三角形 ABC 为直角三角形，O' 为三角形 ABC 外接圆的圆心，$\therefore r=O'A=\frac{1}{2}\cdot AB=2$，则 $O'F=\sqrt{AF^2+AO'^2-2AF\cdot AO'\cdot\cos\angle FAC}=\sqrt{\frac{1}{4}+4-2\cdot\frac{1}{2}\cdot2(-\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{21}}{2}$，过 O' 作 $O'O\perp$ 平面 ABC，则 $OO'//DF$，取 $OA=OB=OC=OD=R$，过 O 作 $OH\perp DF$ 于 H，则 $HFO'O$ 为矩形，

$OO'=HF$，$OH=O'F$，在三角形 DHO 中，$OD^2=R^2=(DF-OO')^2+O'F^2=(\frac{\sqrt{3}}{2}-OO')^2+\frac{21}{4}$①，在三角形 $OO'B$ 中，$R^2=OO'^2+r^2=OO'^2+4$②，由①②可得 $R^2=\frac{16}{3}$，则外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{64\pi}{3}$，故选：C.





9. （广东一模，理11）已知三棱锥 $P-ABC$ 满足 $PA=PB=PC=AB=2$，$AC\perp BC$，则该三棱锥外接球的体积为（　　）

A. $\frac{32}{27}\sqrt{3}\pi$　　B. $\frac{32}{3}\pi$　　C. $\frac{32}{9}\sqrt{3}\pi$　　D. $\frac{16}{3}\pi$

【答案】A

【解析】（湖北武汉余嘉伦）

设 AC、AB 中点为分别 D、M，连结 PD，DM，PM，则 $AC\perp PD$，$PM\perp AB$，由 $AC\perp BC$ 知 $AC\perp DM$，且 $PD\cap DM=D$，故 $AC\perp$ 面 PDM，故 $AC\perp PM$，故 $PM\perp$ 面 ABC，所以球心在直线 PM 上，设为 O（如图2），易知 $CM=1$，$PM=\sqrt{3}$，设球半径为 R，在 $\mathrm{Rt}\triangle PCM$ 中，由勾股定理可得 $R^2=\left(\sqrt{3}-R\right)^2+1^2$，解得 $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$.

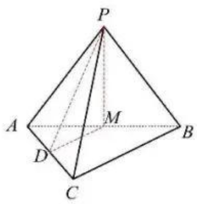


图1

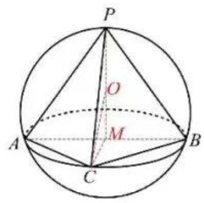


图2

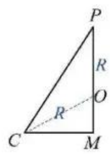


图3

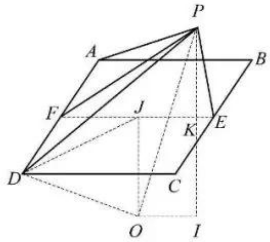
10. （东北三省四市二模，理16）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=2$，$\triangle PAD$ 为等边三角形，线段 BC 的中点为 E，若 $PE=1$，则此四棱锥的外接球的表面积为_______.

【答案】$\frac{28\pi}{3}$

【解析】（黑龙江哈尔滨夏志鹏）

设 AD 中点为 F，则 $AD\perp PF$，$EF\perp AD$，故 $AD\perp$ 面 PEF，故面 $ABCD\perp$ 面 PEF，过点 P 作 $PI\perp EF$ 于点 K，则 $PI\perp$ 面 $ABCD$，$PK=\frac{\sqrt{3}}{2}$，过底面外心 $ABCD$ 点 J 作 $OJ//PI$，可构造直角三角形解球半径，设 $OJ=h$，则 $\left(\sqrt{2}\right)^2+h^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(h+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，设球半径为 R，$R^2=\frac{7}{3}$，表面积为 $\frac{28\pi}{3}$

压轴小题



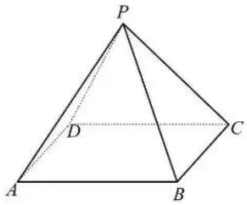
11. （长郡十五校高三第二次联考，理16）已知 $R=\sqrt{R_1^2+R_2^2-\frac{l^2}{4}}$、$B$、$R_1$、$R_2$ 四点都在表面积为 100π 的球 R 的表面上，若 $BC=4\sqrt{3}$，$\angle BAC=120^\circ$．则球 $R^2=R_1^2+R_2^2-\frac{l^2}{4}$ 内接三棱锥 $R_1=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的体积的最大值为______.

【答案】$\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

【解析】（江西抚州杨敏）

设球的半径为 R，$\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 r，则 $R=\sqrt{\frac{100\pi}{4\pi}}=5$，$2r=\frac{4\sqrt{3}}{\sin120^0}=8$，即 $r=4$，$\therefore$ 点 D 到底面 ABC 的最大距离为 $h=5+\sqrt{5^2-4^2}=8$，$\because BC^2=AB^2+AC^2+AB\cdot AC\geq 3AB\cdot AC$，$\therefore AB\cdot AC\leq 16$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC\leq 4\sqrt{3}$，$\therefore V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h\leq\frac{1}{3}\times4\sqrt{3}\times8=\frac{32\sqrt{3}}{3}$

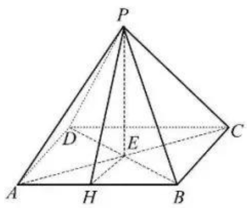
12. （石家庄模拟，文15）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=AP=2$，$\angle PAB=\angle PAD=60^\circ$，则该四棱锥的外接球的表面积为______.



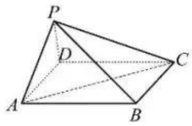
【答案】8π.

【解析】（湖北荆州张凡）

过点 P 作 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，连结 BE,DE，因为 $AB=AP=AD$，$\angle PAB=\angle PAD=60^\circ$，所以 $PB=PD$，故 $ED=EB$，因此 $\triangle ABE\cong\triangle ADE$，$\angle BAE=\angle DAE$，因此 E 在 AC 上.过 E 作 $EH\perp AB$，连结 PH，因为 $AB\perp PE$，$AB\perp HE$，$PE\cap HE=E$，故 $AB\perp$ 平面 PEH，故 $AB\perp PH$，所以 $AH=1$，$PH=\sqrt{3}$，在 $Rt\triangle AEH$ 中，$AE=\sqrt{2}$，$EH=1$，因此 E 为 AC 中点，即也为 BD 中点.在 $Rt\triangle PEH$ 中，$PE=\sqrt{PH^2-EH^2}=\sqrt{2}$.所以 E 为四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球球心，半径为 $\sqrt{2}$，球的表面积为 8π.



13. （石家庄模拟，理15）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=2AP=4$，$\angle PAB=\angle PAD=60^\circ$，则______；四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为______.（第一个空2分，第二个空3分）

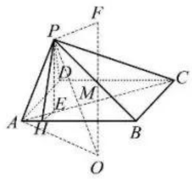


【答案】$\frac{\pi}{4}$；40π.

【解析】（湖北荆州张凡）

作 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，由 $\angle PAB=\angle PAD=60^\circ$，知点 E 在线段 AC 上，过 E 作 $EH\perp AB$，连结 PH，因为 $AB\perp EH$，$AB\perp PE$，$EH\cap PE=E$ 故 $AB\perp$ 平面 PEH，故 $AB\perp PH$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAH$ 中，$AH=1$，$PH=\sqrt{3}$；在 $\mathrm{Rt}\triangle EAH$ 中，$AE=\sqrt{2}$，$EH=1$；在 $\mathrm{Rt}\triangle PEH$ 中，$PE=\sqrt{2}$，因此 $\tan\angle PAE=1$，故 $\angle PAE=\frac{\pi}{4}$；

取 M 为 AC 中点，设该四棱锥的外接球的球心为 O，半径为 R，$OM\perp$ 平面 $ABCD$，设 $OM=d$，作 $PF\perp OM$，易知四边形 $PFME$ 为正方形.则有 $\begin{cases}R^2=d^2+8\\R^2=\left(d+\sqrt{2}\right)^2+2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}d=\sqrt{2}\\R=\sqrt{10}\end{cases}$，故外接球表面积为 $S=4\pi R^2=40\pi$.



14.（2020届湘赣皖长郡十五校高三二联，文16）已知在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$\angle DAB=90^\circ$，满足 $DC=2$，$AB=1$，$AD=\sqrt{3}$ 沿 BD 将三角形 BDC 折起，把 C 折到 P 点，使平面 $PBD\perp$ 平面 ABD，则 $P-ABD$ 的外接球的表面积为______.

【答案】$\frac{16\pi}{3}$

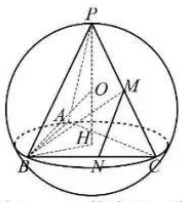
【解析】（湖南邵阳姜峰）

在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle ADB=30^\circ$，$\therefore\angle BDC=60^\circ$，因为 $BD=CD=2$，所以 $\triangle BDC$ 为正三角形，在三棱锥 $P-ABD$ 中，取 BD 的中点 E，连接 PE，则 $PE\perp$ 平面 ABD，取 O 为 PE 三等分点，$PO=2OE$，所以 $OA=OB=OD=OP$，所以 O 为三棱锥 $P-ABD$ 的外接球的球心，所以 $R=OB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $S=\frac{16}{3}\pi$.

15.（池州五月检测，文16）在正三棱锥 $P-ABC$ 中，M,N 分别是 PC,BC 中点，且 $AM\perp MN,PA=2\sqrt{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为______.

【答案】36π

【解析】（湖北十堰陈强）



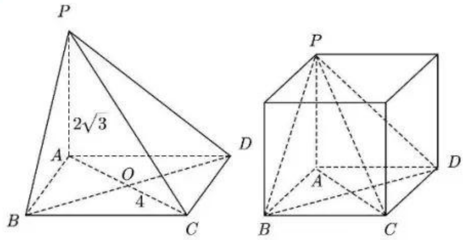
设底面 $\triangle ABC$ 三边中线交于点 H，则点 H 为 $\triangle ABC$ 的中心，连接 PH 易得 $PH\perp$ 平面 ABC，所以 $PH\perp BC$ 由三线合一知 $AN\perp BC$，又因为 $PH\cap AN=H$，所以 $BC\perp$ 平面 PNA，所以 $BC\perp PA$，同理证明 $AB\perp PC$，$AC\perp PB$，即正三棱锥对棱垂直，由中位线定理得 $MN//PB$，又因为 $AM\perp MN$，所以 $AM\perp PB$，因为 $AC\perp PB$，$BC\perp PA$，所以 $PB\perp$ 平面 PAC，所以 $PB\perp PA$，$PB\perp PC$，因为 $PB\perp PA$，$BC\perp PA$，所以 $PA\perp$ 平面 PBC，所以 $PA\perp PC$，故正三棱锥 $P-ABC$ 三条侧棱两两垂直，等价看做从正方体一个顶点出发的三条棱.所以

$(2R)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2$ 则外接球表面积 $S=4\pi R^2=36\pi$

16. **（2020莆田市高中毕业班教学质量第二次检测，文15）** 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形， $AC=4$， $PA=2\sqrt{3}$，当四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大时，其外接球的表面积为______.

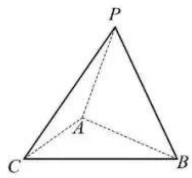
【答案】 28π.

【解析】（江苏苏州陈海锋）



因为 $PA=2\sqrt{3}$ 为定值，所以对于每一个给定的矩形 $ABCD$，当 $PA\perp$ 底面 $ABCD$ 时，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大，此时 $V_{四棱锥P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times S_{矩形ABCD}\times PA=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times S_{矩形ABCD}$，连结 BD，设 $BD\cap AC=O$，则 $S_{矩形ABCD}=2OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB\le 2OA\cdot OB=8$，此时矩形 $ABCD$ 为正方形，且正方形边长为 $2\sqrt{2}$.故 $V_{四棱锥P-ABCD}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times S_{矩形ABCD}\le\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$，当底面为正方形且 $PA\perp$ 底面 $ABCD$ 时取最大值.体积最大时，将四棱锥 $P-ABCD$ 补成长方体，则四棱锥的外接球即为该长方体的外接球，外接球的表面积为 $\left((2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2\right)\pi=28\pi$.

17. **（广东一模，文15）** 如图，已知三棱锥 $P-ABC$ 满足 $PA=PB=PC=AB=2$， $AC\perp BC$，则该三棱锥外接球的体积为_______.



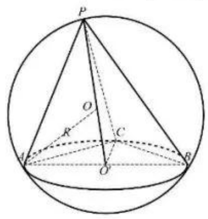
【答案】 $\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{27}$

【解析】（广西南宁安然）

设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O'，因为 $AC\perp BC$，所以 O' 为 AB 中点，设其半径为 $r=\dfrac{1}{2}AB=1$，

依题意， $PA=PB$，知球心 O 在 PO' 上，所以 $PO'=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，又 $R^2=OO'^2+r^2=(PO'-R)^2+1^2$，

解得 $R=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$，所以三棱锥外接球体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3=\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{27}$.



18. **（2020大连一模，文16）** 已知矩形 $ABCD$ 中， $AB=8$， $AD=6$，沿对角线 BD 折叠成空间四边形 $ABCD$，则

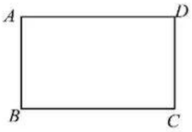
压轴小题

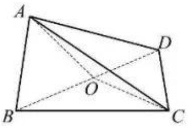
空间四边形 $ABCD$ 的外接球的表面积为______.

【答案】100π.

【解析】(浙江嘉兴温福长)

取 BD 的中点 O，连 OA，OB，OC，OD，则 $OA=OB=OC=OD=5$，故 O 为空间四边形 $ABCD$ 的外接球的球心，且 $r=5$，所以 $S=4\pi r^2=100\pi$.





19.（莆田市第二次检测，理16）已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形，$AC=4$，$PA=2\sqrt{3}$.当四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大时，其外接球球心 O 到平面 PBD 的距离为______.

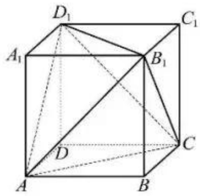
【答案】$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】（湖北雷誉）

当四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大时，即 $PA\perp$ 面 $ABCD$，且底面为正方形时，此时外接球球心即为 PC 中点，

$V_{O-PBD}=V_{B-POD}=\frac{1}{2}V_{B-PCD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，又 $S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$，故 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

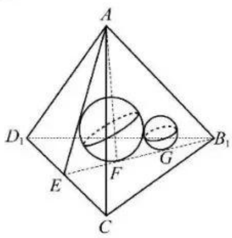
20.（2020年山东5月质量检测，15）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2\sqrt{3}$，其内有2个不同的小球，球 O_1 与三棱锥 $A-CB_1D_1$ 的四个面都相切，球 O_2 与三棱锥 $A-CB_1D_1$ 的三个面和球 O_1 都相切，则球 O_1 的体积等于______，球 O_2 的表面积等于______.

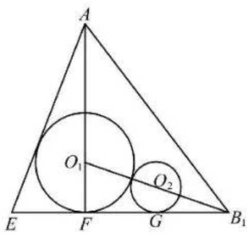


【答案】$\frac{4\pi}{3}$；π

【解析】(江西于都李先源)

作出两球的截面如图所示：





由题意可得，正四面体 $A-CB_1D_1$ 的棱长为 $\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{6}$，高 $AF=4$，设球 O_1 的半径为 R，

则由等体积法 $\frac{1}{3}\left(S_{\triangle AB_1D_1}+S_{\triangle AB_1C}+S_{\triangle ACD_1}+S\triangle_{\triangle CB_1D_1}\right)R=\left(2\sqrt{3}\right)^3-V_{B-AB_1C}-V_{C_1-D_1B_1C}-V_{D-AD_1C}-V_{A_1-AB_1D_1}$，

即 $\frac{1}{3}\times4\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^3$，解得 $R=1$，所以 $O_1B_1=O_1A=3$，所以球 O_1 的体积为 $\frac{4}{3}$；

对于球 O_2，设其半径为 r，如图可得 $\frac{O_2G}{O_1F}=\frac{O_2B_1}{O_1B_1}$，即 $\frac{r}{R}=\frac{3-r-R}{3}$，所以 $\frac{2-r}{3}=\frac{r}{1}$，得 $r=\frac{1}{2}$，所以球 O_2 的表

面积为$4\pi r^2=4\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\pi$.

考向3 动点问题

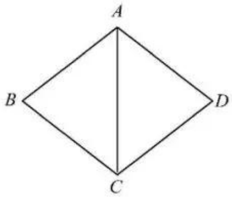
1. （2020深圳线下调研，理12）将边长为5的菱形$ABCD$沿对角线AC折起，顶点B移动B'至，在以B',A,C,D为顶点的四面体$AB'CD$中，棱AC，$B'D$的中点分别为E，F，若$AC=6$，且四面体$AB'CD$的外接球球心落在四面体内部，则线段EF长度的取值范围为

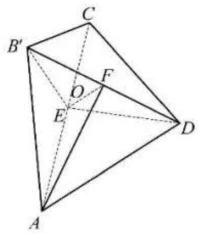
A. $\left(\frac{\sqrt{14}}{2},2\sqrt{3}\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{14}}{2},4\right)$　　C. $\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$　　D. $\left(\sqrt{3},4\right)$

【答案】A

【解析】（湖北武汉蔡绍明）

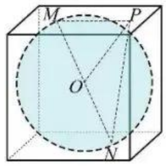
如图，显然$AC\perp B'E$，且$AC\perp DE$，所以$AC\perp$平面$B'ED$，又E是AC的中点，所以到点A，C的距离相等的点位于平面$B'ED$内，同理可知，到点B'，D的距离相等的点位于平面ACF内，球心O到点A，B'，C，D的距离都相等，所以球心O位于平面$B'ED$与平面ACF的交线上，即直线EF上，依题意可知，球心O落在线段EF上（不含端点）.由$EF\perp B'D$，易知$OE=\frac{7}{2EF}<EF$，即$EF>\frac{\sqrt{14}}{2}$，又$EF<EB'=4$，故应选B.





2.（池州5月检测，理10）已知MN是正方形内切球的一条直径，点P在正方形表面上运动，正方体的棱长是2，则$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$的取值范围为

A. $[0,4]$　　B. $[0,2]$　　C. $[1,4]$　　D. $[1,2]$



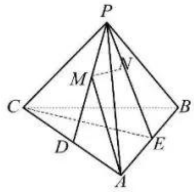
【答案】B

【解析】（安徽安庆王鹏）

设球心为O，由极化恒等式可得$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OM}^2=\overrightarrow{PO}^2-1$

易知当点P在正方体面的中心时$\left|\overrightarrow{PO}\right|$取得最小$\left|\overrightarrow{PO}\right|_{\min}=1$，在正方体顶点时$\left|\overrightarrow{PO}\right|$取得最大$\left|\overrightarrow{PO}\right|_{\max}=\sqrt{3}$，所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$的取值范围为$[0,2]$.

3. （湖北八校第二次联考，理12）已知，如图正三棱锥$P-ABC$中，侧棱长为$\sqrt{2}$，底面边长为2，D为AC中点，E为AB中点，M是PD上的动点，N是平面PCE上的动点，则$AM+MN$最小值是（　　）



（第12题图）

A. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　　B. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

【解析】（四川攀枝花王凯）

要求 $AM+MN$ 最小，即求 MN 最小，可得 $MN\perp$ 平面 PCE，又可证明 $MN // DF$；再把平面 POD 绕 PD 旋转，与 PDA 共面；又可证得 $\angle POD=90^{\circ}$，$\because PD=\frac{1}{2}AC$，$DO=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$，$\therefore \sin\angle OPD=\frac{OD}{PD}=\frac{1}{2}$ 即 $\angle OPD=30^{\circ}$，$\therefore \angle APN=45^{\circ}+30^{\circ}=30^{\circ}$，可得 $\sin 75^{\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$(AM+MN)_{\min}=AN=PA\cdot\sin 75^{\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

4.（2020梅州5月质检，理12）在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，四面体 $OABC$ 各顶点坐标分别为 $O(0,0,0)$，$A(0,0,2)$，$B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,0\right)$，$C\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$．假设蚂蚁窝在 O 点，一只蚂蚁从 O 点出发，需要在 AB，AC 上分别任意选择一点留下信息，然后再返回 O 点．那么完成这个工作所需要走的最短路径长度是

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{11-\sqrt{21}}$　　C. $\sqrt{5+\sqrt{21}}$　　D. $2\sqrt{3}$

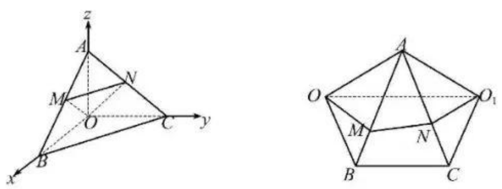
【答案】C.

【解析】（湖北武汉黄祥华）

如图，将四面体的侧面 OAB 与侧面 OAC 沿着边 AB 与 AC 在平面 ABC 内展开．如图所示，在直角 $\triangle BOC$ 中，$BC=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，在 $\triangle BAC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BOC=\frac{3}{4}$，$\angle BAO=\angle CAO_1=\frac{\pi}{6}$，在 $\triangle AOO_1$ 中，因为

$\cos\angle OAO_1=\cos\left(\angle BAC+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3-\sqrt{21}}{8}$，所以由余弦定理可得

$OO_1^2=OA^2+O_1A^2-2OA\cdot O_1A\cdot\cos\angle OAO_1=5+\sqrt{21}$，又因为 $OM+MN+MO_1\geq OO_1$，因此最短路径长度为 $\sqrt{5+\sqrt{21}}$，当且仅当 O、M、N、O_1 四点共线时取等号．



5.（2020南充诊断，理12）已知三条射线 OA，OB，OC 两两所成的角都是60°，点 M 在 OA 上，点 N 在 $\angle BOC$ 内运动，且 $MN=OM=6\sqrt{3}$，则点 N 的轨迹长度为（　　）

A. 2π　　B. 3π　　C. 4π　　D. 5π

【答案】C

【解析】（四川泸州刁如金）

根据题意可知，$|OM|=|MN|$，$\angle EOM=\angle FOM=\angle EOF=60^\circ$，可知$M-OEF$为正四面体，

设M在底面的投影为K，N点的轨迹为以K为圆心，ON为直径的圆弧ENF，

由三余弦定理有$\cos\angle MOF=\cos\angle MOK\cos\angle HOF$，则$\cos\angle MOK=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

在Rt$\triangle MOK$中，$\cos\angle MOK=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{OK}{OM}$，则$OK=r=6$，又$\angle EOF=60^\circ$，所以$\angle EKF=120^\circ$，

即$l_{ENF}=|\alpha|\cdot r=\dfrac{2\pi}{3}\cdot 6=4\pi$．故选C．

考向 4 三视图及截面问题

1．（2020深圳线下调研，文11）已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，棱长为4，BB_1的中点为M，过D、M、C_1三点的平面截正方体为两部分，则截面图形的面积为（　　）

A．18　　B．$6\sqrt{10}$　　C．$12\sqrt{2}$　　D．36

【答案】A

【解析】（浙江湖州卢骏杨）

如图1，设截面为α，取AB中点E，连DE、ME，易证DE，$ME\subset\alpha$，又$\because M$，E为中点，$\therefore ME$为$\triangle ABB_1$中位线，易证$ME/\!/C_1D$．如图2，得$S=\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)\cdot 3\sqrt{2}=18$．

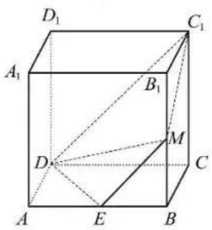


图1

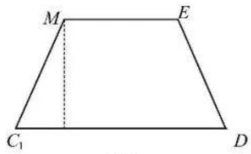
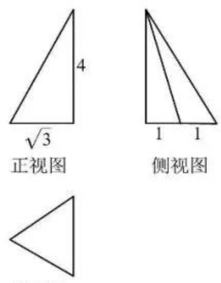


图2

2．（2020湖南金太阳理科11）某几何体的三视图如图所示，俯视图为正三角形，则该几何体外接球的表面积为

A．$\dfrac{25\pi}{4}$　　B．$\dfrac{64\pi}{3}$　　C．25π　　D．32π



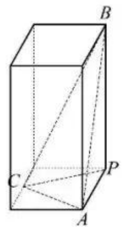
【答案】B

【解析】（河南洛阳刘友友）

由三视图可知，该几何体为如图所示的三棱锥$B-PAC$，设外接球的半径为R，$\triangle PAC$的外接圆的半径$r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

压轴小题

则 $R^2=r^2+2^2=\frac{16}{3}$，所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{64\pi}{3}$



数　列

1. **（东北三省四市二模，理11）** 若数列$\{a_n\}$满足$a_1=-\dfrac{1}{3}$，且$a_n=a_{n-1}+(-2)^n(n\geqslant2)$，若使不等式$|a_n|\leqslant\lambda$成立的$a_n$有且只有三项，则$\lambda$的取值范围为

A. $\left[\dfrac{13}{3},\dfrac{35}{3}\right)$　　B. $\left(\dfrac{13}{3},\dfrac{35}{3}\right]$　　C. $\left[\dfrac{35}{3},\dfrac{61}{3}\right)$　　D. $\left(\dfrac{35}{3},\dfrac{61}{3}\right]$

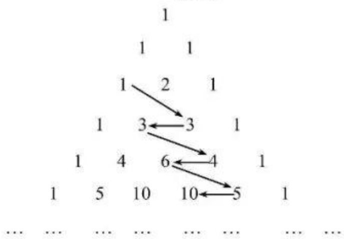
【答案】A

【解析】（黑龙江哈尔滨夏志鹏）

若使不等式$|a_n|\leqslant\lambda$成立，则$|a_n|_{\max}\leqslant\lambda$，故只有三项$a_n$满足条件，$a_1=-\dfrac{1}{3}$，$a_2=\dfrac{11}{3}$，$a_3=-\dfrac{13}{3}$，$a_4=\dfrac{35}{3}$，由通项公式易知，$\{|a_n|\}$是单调递增数列，因此$|a_3|\leq\lambda<|a_4|$，故$\lambda$的取值范围为$\left[\dfrac{13}{3},\dfrac{35}{3}\right)$

2. **（湖北八校第二次联考，理11）** 如图，在杨辉三角中，斜线l的上方从1按箭头所示方向可以构成一个“锯齿形”数列：1，3，3，4，6，5，10，…，将该数列中的奇数项依次取出组成一个新的数列$\{a_n\}$，则$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2020}}=$

A. $\dfrac{2020}{2021}$　　B. $\dfrac{2019}{2020}$　　C. $\dfrac{4021}{2020}$　　D. $\dfrac{4040}{2021}$



（第11题图）

【答案】D

【解析】（四川攀枝花王凯）

根据题意数列$\{a_n\}$中$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=6$，$a_4=10$，…，易求得$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

$\therefore\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，求和得$\dfrac{4040}{2021}$

3. **（东北三省四市二模，理15）** 数列$\{a_n\}$是等差数列，前n项和为S_n，$a_1=1$，$S_5=15$，且$a_3+\lambda a_9+a_{15}=15$，则实数$\lambda=$________.

【答案】$-\dfrac{1}{3}$

【解析】（黑龙江哈尔滨夏志鹏）

等差数列基本量计算可知$a_n=n$，$a_3+\lambda a_9+a_{15}=3+9\lambda+15=15$，解得$\lambda=-\dfrac{1}{3}$

4. **（广东一模，理14）** 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n$，若数列$\{b_n\}$满足$b_n\cdot S_n=1$，则$\dfrac{b_1+1}{b_1}+\dfrac{b_2+1}{b_2}+\cdots+\dfrac{b_{10}+1}{b_{10}}=$________.

【答案】2046

【解析】（湖北武汉余嘉伦）

由已知得 $a_n=2^{n-1}$，$S_n=\dfrac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$，所以 $b_n=\dfrac{1}{2^n-1}$，则 $\dfrac{b_n+1}{b_n}=\dfrac{\frac{1}{2^n-1}+1}{\frac{1}{2^n-1}}=2^n$，所以

$\dfrac{b_1+1}{b_1}+\dfrac{b_2+1}{b_2}+\cdots+\dfrac{b_{10}+1}{b_{10}}=2^1+2^2+\cdots 2^{10}=2046$.

5.（重庆康德二诊，理15） 已知公差不为0的等差数列$\{a_n\}$中，a_2，a_4，a_8依次成等比数列，若a_3，a_6，a_{b_1}，a_{b_2}，…，a_{b_n}，…成等比数列，则$b_n=$_______.

【答案】$3\cdot 2^{n+1}$.

【解析】（安徽合肥吴威）

设公差为d，由题知$a_4^2=(a_4-2d)(a_4+4d)$，即$a_4=4d$，$\therefore a_n=nd\Rightarrow a_3=3d$，$a_6=6d$，故等比数列$\{a_{b_n}\}$首项为$3d$，公比为2，因此$a_{b_n}=3d\cdot 2^{n+1}=b_nd$，故$b_n=3\cdot 2^{n+1}$.

6.（2020宜春模拟，理15） 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=11$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$，若对于任意的$m\in[1,4]$，任意的$n\in\mathbf{N}^*$使得$a_n<t^2+mt$恒成立，则实数$t$的取值范围是_______.

【答案】$(-\infty,-6]\cup[3,+\infty)$

【解析】（江西宜春饶春林）

由已知得$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

$\therefore$当$n\geq 2$时，$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=11+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)=12-\dfrac{1}{n}$，

$\because a_1=11$也适合上式，$\therefore a_n=12-\dfrac{1}{n}$，且数列$\{a_n\}$是递增数列，$\therefore n\in\mathbf{N}^*$，$11\leq a_n<12$，

若对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$使得$a_n<t^2+mt$恒成立，则$t^2+mt\geq 12$，即$t^2+mt-12\geq 0$，

设$f(m)=tm+t^2-12$，则$f(m)\geq 0$对于任意的$m\in[1,4]$恒成立，$\therefore\begin{cases}f(1)=t^2+t-12\geq 0\\ f(4)=t^2+4t-12\geq 0\end{cases}$，解得$t\geq 3$或$t\leq -6$，

$\therefore$实数t的取值范围是$(-\infty,-6]\cup[3,+\infty)$.

解析几何

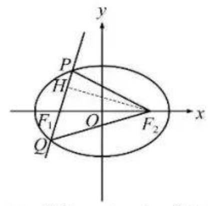
考向 1 离心率问题

1. （东北三省四市二模，理12）设椭圆C的两焦点为F_1，F_2，焦距为$2c$，过点F_1的直线与椭圆C交于P，Q两点，若$|PF_2|=2c$，且$|PF_1|=\frac{4}{3}|QF_1|$，则椭圆C的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{5}{7}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】（黑龙江哈尔滨夏志鹏）



利用椭圆定义构造三角形解形，设$|QF_1|=3k$，则$|PF_1|=4k$，$|PF_2|=2c$，$|QF_2|=2a-3k$，过点F_2作$F_2H\perp PQ$，则$PH=2k$，双勾股定理，得$(2a-3k)^2-(5k)^2=(2c)^2-(2k)^2$，点$P$在椭圆上，故$|PF_1|+|PF_2|=4k+2c=2a$，联立方程解得椭圆$C$的离心率为$\frac{5}{7}$

2. （宁德质检，文12）已知双曲线C的两个顶点分别为A_1，A_2，若C的渐近线上存在点P，使得$|PA_1|=\sqrt{2}|PA_2|$，则C的离心率的取值范围是

A. $(1,3]$　　B. $[3,+\infty)$　　C. $(1,2]$　　D. $[2,+\infty)$

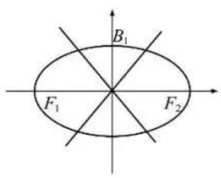
【答案】A

【解析】（浙江宁波赖庆龙）

设点$P(x,y)$，由$|PA_1|=\sqrt{2}|PA_2|$得，$(x+a)^2+y^2=2(x-a)^2+2y^2$，即$x^2-6ax+y^2+a^2=0$，又点$P$在$C$的渐近线上，由对称性，不妨取$y=\frac{b}{a}x$，则直线与圆有公共点，所以$\frac{3ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 2\sqrt{2}a$，得$9b^2\le 8c^2$，即$c^2\le 9a^2$，所以$1<e\le 3$，故选项A正确.

3. （湖北八校联考，文12）已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$和双曲线$C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，点$P$是椭圆上任意一点，且点$P$到双曲线$C_2$的两条渐近线的距离的平方和为定值，则双曲线$C_2$的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2



【答案】A

【解析】（湖北武汉周雪）

压轴小题

【解法1】设 $P(x,y)$，双曲线的两条渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，设点 P 到这两条渐近线的距离的距离分别为 d_1，d_2，

则 $d_1^2+d_2^2=\left(\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{2\left(b^2x^2+a^2y^2\right)}{a^2+b^2}=\frac{2\left(b^2x^2+a^2\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)\right)}{c^2}=\frac{2\left((b^2-\frac{1}{4}a^2)x^2+a^2\right)}{c^2}$

要使得上式为定值，则必须 x^2 的系数为0，故 $b^2=\frac{1}{4}a^2$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解法2】特值法，分别取点 P 为椭圆的右顶点 $(2,0)$ 和上顶点 $(0,1)$，

当点 P 为 $(2,0)$ 时，$d_1^2+d_2^2=\left(\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{8b^2}{a^2+b^2}=\frac{8b^2}{c^2}$；

当点 P 为 $(0,1)$ 时，$d_1^2+d_2^2=\left(\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{2a^2}{a^2+b^2}=\frac{2a^2}{c^2}$；

依题意，$\frac{8b^2}{c^2}=\frac{2a^2}{c^2}$，故 $b^2=\frac{1}{4}a^2$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. **（长郡十五校高三第二次联考，理11）**已知 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$ 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，F_1 关于双曲线的一条渐近线的对称点为 P，且点 P 在抛物线 $y^2=4cx$ 上，则双曲线的离心率为（　　）

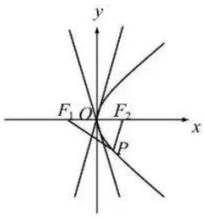
A. $\sqrt{2}+1$　　　B. 2　　　C. $\sqrt{5}$　　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】D

【解析】（江西抚州杨敏）

$\triangle F_1PF_2$ 中，$PF_1=2b, PF_2=2a$，$\tan\angle F_1F_2P=\frac{b}{a}$，$\therefore\cos\angle F_1F_2P=\frac{a}{c}$，$\therefore F_1F_2=PF_2+PF_2\cos\angle F_1F_2P$，

$\therefore 2c=2a+2a\cos\angle F_1F_2P$，$\therefore e^2-e-1=0$，$\therefore e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$



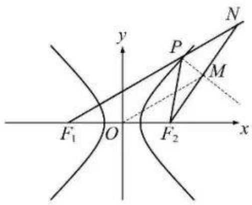
5. **（宁德质检，理12）**双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，O 为坐标原点，P 为曲线 C 右支上一点，点 M 在 $\angle F_1PF_2$ 外角平分线上，且 $\overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{PM}=0$，若 $\triangle OF_2M$ 恰为顶角为 120° 的等腰三角形，则双曲线的离心率为（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　　B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　　C. 2　　　D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】（四川成都夏桎）

压轴小题



由题意可得 $PF_2=PN$，$PF_1-PF_2=2a$，又 $\triangle OF_2M$ 恰为顶角为 120° 的等腰三角形，所以 $OM=\sqrt{3}OF_2=\sqrt{3}c$，又 O 为 F_1F_2 中点 M 为 NF_2 中点，所以 $F_1N=2\sqrt{3}c=PF_1+PF_2$，所以 $PF_1=\sqrt{3}c+a$，$PF_2=\sqrt{3}c-a$，$\angle PF_1F_2=30^\circ$，在 $\triangle PF_1F_2$ 由余弦定理可得 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{3}c+a\right)^2+4c^2-\left(\sqrt{3}c-a\right)^2}{2\left(\sqrt{3}c+a\right)(2c)}$，解得 $c=\sqrt{3}a$，所以 $e=\sqrt{3}$

6. **（莆田市第二次检测，理 11）** 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过双曲线 C 上任意一点 P 分别作 C 的两条渐近线的垂线，垂足分别为 A，B，$|PA|\cdot|PB|=\dfrac{8}{9}$，$|F_1F_2|$ 等于 $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^3$ 展开式的常数项，则双曲线 C 的离心率为

A. 3　　B. 3 或 $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　D. $2\sqrt{2}$ 或 $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

【答案】B

【解析】（湖北雷誉）

设 $P(x_0,y_0)$，P 到渐近线 $bx-ay=0$ 的距离 $|PA|=\dfrac{|bx_0-ay_0|}{c}$，$P$ 到渐近线 $bx+ay=0$ 的距离 $|PB|=\dfrac{|bx_0+ay_0|}{c}$，则 $|PA|\cdot|PB|=\dfrac{b^2x_0^2-a^2y_0^2}{c^2}=\dfrac{a^2b^2}{c^2}=\dfrac{8}{9}$，则 $\dfrac{ab}{c}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，又 $2c=C_3^2\cdot 2=6$，$c=3$，$ab=2\sqrt{2}$，又 $a^2+b^2=c^2$，解得 $a=2\sqrt{2}$ 或 1，故 $e=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ 或 3，选 B.

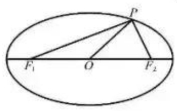
7. **（池州五月检测，文11）** 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，若在椭圆上存在点 P，使得 $PF_1\perp PF_2$，则椭圆的离心率的取值范围为

A. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　C. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$　　D. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

【答案】A

【解析】（湖北十堰陈强）

由 $PF_1\perp PF_2$ 得 $|OP|=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|=c\le b$，所以 $c^2\le a^2-c^2$ 易得 $e\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$



8. **（2020深圳线下调研，理16）** 已知点 F_1，F_2，分别为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）左、右焦点，点 $M(x_0,y_0)$ $(x_0<0)$ 为 C 的渐近线与圆 $x^2+y^2=a^2$ 的一个交点，O 为坐标原点，若直线 F_1M 与 C 的右支交于点 N，且 $|MN|=|NF_2|+|OF_2|$，则双曲线 C 的离心率为______.

压轴小题

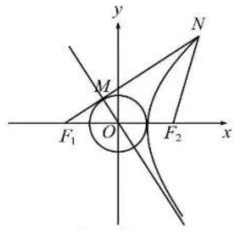
【答案】$\frac{5}{4}$

【解析】（湖北武汉蔡绍明）

直线 F_1M 与圆相切于点 M，且 $F_1M=b$

由双曲线定义可知：$2a=|NF_1|-|NF_2|=|MN|+|MF_1|-|NF_2|=|MF_1|+|OF_2|=b+c$

又 $b^2=c^2-a^2$，所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$



9. （2020深圳线下调研，文16）设 F 为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左焦点，过 F 作圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线，切点为 M，切线与渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 相交于点 N，若 $|MN|=2|MF|$，则 C 的离心率为______.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】（浙江湖州卢骏杨）

【解法1】（离心率几何意义求解，速解）设 $\angle MOF=\alpha$，则 $\angle MON=\pi-2\alpha$，$\therefore \tan\angle MON=\frac{|MN|}{|OM|}$，即 $\tan(\pi-2\alpha)=\frac{2b}{a}$，$\therefore 2a^2=b^2$，$\therefore e=\sqrt{3}$.

【解法2】（找关系求解，一般解法）设 $\angle MFO=\alpha$，$\because |OF|=c$，$|OM|=a$，$\therefore |MF|=b$，$|MN|=2b$.

$\therefore \cos\alpha=\frac{b}{c}$，$\sin\alpha=\frac{a}{c}$，$\therefore x_N=\frac{3b^2-c^2}{c}$，$y_N=\frac{3ab}{c}$.

又点 N 在直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上，$\therefore$ 整理得 $3a^2=c^2$，又 $\because e>1$，$\therefore e=\sqrt{3}$.

考向 2 轨迹问题

1. （2020佛山二模，理12）双纽线最早于1694年被瑞士数学家雅各布•伯努利用来描述他所发现的曲线，在平面直角坐标系 xOy 中，把到定点 $F_1(-a,0)$，$F_2(a,0)$ 距离之积等于 $a^2(a>0)$ 的点的轨迹称为双钮线 C，已知点 $P(x_0,y_0)$ 是双钮线 C 上一点，下列说法中正确的有（　　）

①双钮线 C 关于原点 O 中心对称；　　②$-\frac{a}{2}\le y_0\le\frac{a}{2}$；

③双钮线 C 上满足 $|PF_1|=|PF_2|$ 的点 P 有两个；④$|PO|$ 的最大值为 $\sqrt{2}a$.

A. ①②　　B. ①②④　　C. ②③④　　D. ①③

【答案】B.

【解析】（湖北襄阳殷勇）

在曲线 C 上任取一点 $P(x,y)$，则由题意得 $|PA|\cdot|PB|=a^2$，即 $|PA|^2\cdot|PB|^2=a^4$，所以 $\left[(x+a)^2+y^2\right]\cdot\left[(x-a)^2+y^2\right]=a^4$，整理得：$x^4+(2y^2-2a^2)x^2+y^4+2a^2y^2=0$（1），化为极坐标方程得：$\rho^2=2a^2\cos2\theta$（2）.

（思路一）：由方程（1）知①正确，排除C,由方程（2）知④正确，排除A、D，故选B.

（思路二）：①：在（1）式中同时将 x 换成 $-x$，将 y 换成 $-y$，方程不变，所以曲线关于原点 O 中心对称，故①正确；

②:（解法一）在（1）中，由 $\Delta=(2y^2-2a^2)^2-4(y^4+2a^2y^2)=4a^4-16a^2y^2\geq 0$，得 $y^2\leq\frac{a^2}{4}$，$\therefore -\frac{a}{2}\leq y\leq\frac{a}{2}$，故②正确；

（解法二）$\because S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_0|=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF_2$

$\therefore|y_0|=\frac{a^2\sin\angle F_1PF_2}{2a}=\frac{a}{2}\sin\angle F_1PF\leq\frac{a}{2}$，$\therefore -\frac{a}{2}\leq y\leq\frac{a}{2}$,故②正确；

③:满足 $|PF_1|=|PF_2|$ 的点 P 都在 y 轴上，在（1）中，令 $x=0$，得 $y^4+2a^2y^2=0$，解得 $y=0$，即 $P(0,0)$，所以③错误；

④:由方程（2）知④正确.

2. （湖北八校联考，文16）如图，AB 是平面 α 的斜线段，A 为斜足，点 C 满足 $|BC|=\lambda|AC|$（$\lambda>0$），且在平面 α 内运动，则有以下几个命题：

①当 $\lambda=1$ 时，点 C 的轨迹是抛物线；

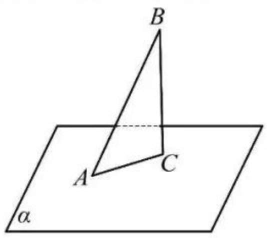
②当 $\lambda=1$ 时，点 C 的轨迹是一条直线；

③当 $\lambda=2$ 时，点 C 的轨迹是圆；

④当 $\lambda=2$ 时，点 C 的轨迹是椭圆；

⑤当 $\lambda=2$ 时，点 C 的轨迹是双曲线；

其中正确的命题是_______.（将所有正确的命题序号填到横线上）

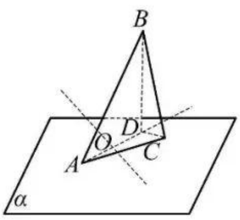


【答案】②③

【解析】（湖北武汉周雪）

当 $\lambda=1$ 时，由 $|BC|=\lambda|AC|$ 可得 $|BC|=|AC|$，所以点 C 的轨迹为线段 AB 的中垂面（即经过线段 AB 的中点且与线段 AB 垂直的平面）β 上.同时又由于点 C 在平面 α 内，所以点 C 为平面 α 与平面 β 的公共点，所以点 C 的轨迹为平面 α 与平面 β 的交线.

【解法1】当 $\lambda=2$ 时，由 $|BC|=\lambda|AC|$ 可得 $|BC|=2|AC|$，



设 B 在平面 α 内的射影为 D，连接 BD，CD.

设 $BD=h$，$CD=2a$，则 $BC=\sqrt{CD^2+h^2}$，在平面 α 内，以 AD 所在直线为 x 轴，以 AD 的中点为坐标原点建立平面直角坐标系，设 $C(x,y)$，则 $CA=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$，$CD=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$，$CB=\sqrt{(x-a)^2+y^2+h^2}$；

所以 $\sqrt{(x-a)^2+y^2+h^2}=2\sqrt{(x+a)^2+y^2}$，化简可得 $\left(x+\frac{5}{3}a\right)^2+y^2=\frac{16}{9}a^2+\frac{h^2}{3}$，所以点 C 的轨迹是圆.

【解法2】当$\lambda=2$时，由$|BC|=\lambda|AC|$可得$|BC|=2|AC|$，由阿波罗尼斯圆的定义可得，点C的轨迹是球，又由于点C在平面α内，所以点C为平面α与球的公共点，所以点C的轨迹为平面α与球的截面圆.

考向3 解析几何综合

1. （2020宜春模拟，理12）已知抛物线C的方程为$x^2=4y$，F为其焦点，过点F的直线l与抛物线交于A，B两点，且抛物线在A，B两点处的切线分别交x轴于P，Q两点，则$|AP|\cdot|BQ|$的取值范围为(　　)

A. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $[0,2)$

【答案】B

【解析】（江西宜春饶春林）

设$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$，联立$\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}$，得$x^2-4kx-4=0$，$\therefore x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，

抛物线C的方程可化为$y=\frac{1}{4}x^2$，则$y'=\frac{1}{2}x$，$\therefore$直线$PA:y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，令$y=0$，解得$x=\frac{1}{2}x_1$，$\therefore P\left(\frac{1}{2}x_1,0\right)$，

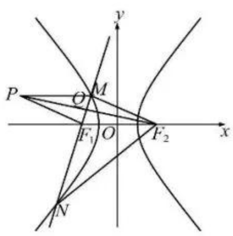
$\therefore |PA|=\frac{1}{4}\sqrt{x_1^2(4+x_1^2)}$，同理可得，$|BQ|=\frac{1}{4}\sqrt{x_2^2(4+x_2^2)}$，

$\therefore |AP|\cdot|BQ|=\frac{1}{16}\sqrt{(x_1x_2)^2(4+x_1^2)(4+x_2^2)}=\frac{1}{16}\sqrt{(x_1x_2)^2\left[16+4(x_1^2+x_2^2)+(x_1x_2)^2\right]}=2\sqrt{1+k^2}\geq 2$，

$\therefore |AP|\cdot|BQ|$的取值范围为$[2,+\infty)$.

2.（芜湖二模，理11）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，过$F_1$的直线$MN$与$C$的左支交于$M,N$两点，若$\left(\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_2M}\right)\cdot\overrightarrow{MF_1}=0$，$\left|\overrightarrow{F_2N}\right|=2\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$，则$C$的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　B. $y=\pm\sqrt{3}x$　　C. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $y=\pm\sqrt{2}x$



【答案】B

【解析】（安徽安庆王鹏）

如图，设$\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_2M}=\overrightarrow{F_2P}$，连接$F_2P$交$MF_1$于点$Q$，由$\left(\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_2M}\right)\cdot\overrightarrow{MF_1}=0$，可得$\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{MF_1}=0$，即$PF_2\perp MF_1$，四边形$F_1F_2MP$为菱形，$\left|\overrightarrow{F_2N}\right|=2\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$，所以$|MF_2|=|F_1F_2|=2c$，$|F_2N|=4c$，由定义可得，$|MF_1|=2c-2a$，$|NF_1|=4c-2a$，$|MQ|=c-a$，$|NQ|=5c-3a$，由勾股定理可得：

$4c^2-(c-a)^2=16c^2-(5c-3a)^2\Rightarrow 3c^2-7ac+2a^2=0\Rightarrow 3e^2-7e+2=0$，$e=2$（$e=\frac{1}{3}$舍），由

$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2\Rightarrow\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以所求$C$的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，故选B.

3. （2020高三石家庄5月模拟，理12）已知抛物线$C:y^2=8x$的焦点为F，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$为抛物线C上的三个动点，其中$x_1<x_2<x_3$且$y_2<0$，若F为$\triangle P_1P_2P_3$的重心，记$\triangle P_1P_2P_3$三边P_1P_2，P_1P_3，P_2P_3的中

压轴小题

点到抛物线 C 的准线的距离分别为 d_1，d_2，d_3 且满足 $d_1+d_3=2d_2$，则 P_1P_3 所在直线的斜率为（　　）

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 2　　D. 3

【答案】C.

【解析】（湖北荆州张凡）

由题意知 $d_1=\frac{x_1+x_2}{2}+2,d_2=\frac{x_1+x_3}{2}+2,d_3=\frac{x_2+x_3}{2}+2$，带入 $d_1+d_3=2d_2$，

得 $x_1+2x_2+x_3=2(x_1+x_3)$，即 $2x_2=x_1+x_3$. 由 F 为 $\Delta P_1P_2P_3$ 的重心，

则有 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=2,\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=0$，即 $2x_2=6-x_2$，即 $x_2=2$，

所以 $y_2=-4$，因此有 $y_1+y_3=4$，故 P_1P_3 所在直线的斜率 $k=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{8}{y_1+y_3}=2$，故选C.

4. （2020 湖南金太阳，文 16）设 F_1,F_2 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$ 的左右焦点，$P(1,1)$ 为 C 内一点，Q 为 C 上任意一点.若 $|PQ|+|QF_1|$ 的最小值为 3，则 C 的方程为______.

【答案】$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

【解析】（河南洛阳刘友友）

$|PQ|+|QF_1|=2a+|PQ|-|QF_2|$，因为 $||PQ|-|QF_2||\le|PF_2|=1$，所以 $2a+|PQ|-|QF_2|\ge 2a-1=3$，所以可得 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

5. （莆田市第二次检测，理15）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 为椭圆上一点，满足 $(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$（点 O 为坐标原点），$\triangle PF_1F_2$ 的面积为1，且其外接圆的面积为 3π，则该椭圆的标准方程为______.

【答案】$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

【解析】（湖北雷誉）

设由 $(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，可知 $|OP|=|OF_2|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，则 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，又 $S=b^2\tan\frac{\pi}{4}=b^2=1$，则 $b=1$，

又 $c=r=\sqrt{3}$，$a=2$，故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

6. （2020湖南金太阳理科16）设 F_1，F_2 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$ 的左右焦点，$P(1,1)$ 为 C 内一点，Q 为 C 上任意一点.现有四个结论：① C 的焦距为2:；② C 的长轴长可能为 $\sqrt{10}$ ③ $|QF_2|$ 的最大值为 $a+1$；④若 $|PQ|+|QF_1|$ 的最小值为3，则 $a=2$.

其中所有正确结论的编号是______.

【答案】①③④

【解析】（河南洛阳刘友友）

易知 $c^2=1$，则 C 的焦距为2。若 C 的长轴长为 $\sqrt{10}$，则 $a^2=\frac{5}{2}$，C 的方程为 $\frac{x^2}{\frac{5}{2}}+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$，将 $P(1,1)$ 带入得 $\frac{1}{\frac{5}{2}}+\frac{1}{\frac{3}{2}}>1$，从而与 P 点在椭圆内部相矛盾。由椭圆定义可知 $|PQ|+|QF_1|=2a+|PQ|-|QF_2|$，因为 $||PQ|-|QF_2||\le|PF_2|=1$，所以 $2a+|PQ|-|QF_2|\ge 2a-1=3$，所以 $a=2$.

7. （四省名校联考，理16）已知直线 $l:y=1$ 与 y 轴交于点 M，Q 为直线 l 上异于点 M 的动点，记点 Q 的横坐标为 n，若曲线 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上存在点 N，使得 $\angle MQN=45^\circ$，则 n 的取值范围是_______.(用区间表示)

【答案】$\left[-1-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,1+\sqrt{3}\right]$

【解析】（云南昆明邹书仙）

令$Q(n,1)$，$n\neq0$，$k_{QN}=k$，则$l_{QN}:y=k(x-n)+1$，

当Q在第一象限，$k=1$时，l_{QN}与椭圆相切时，n取得最大值，

$\begin{cases}x^2+2y^2-2=0\\y=(x-n)+1\end{cases}\Rightarrow 3x^2+4(1-n)x+2(n^2-2n)=0$，$\Delta=0\Rightarrow n=1\pm\sqrt{3}$，$n=1-\sqrt{3}$不符合题意，舍去；

当Q在第二象限，$k=-1$时，l_{QN}与椭圆相切时，n取得最小值，

$\begin{cases}x^2+2y^2-2=0\\y=-(x-n)+1\end{cases}\Rightarrow 3x^2-4(1-n)x+2(n^2+2n)=0$，$\Delta=0\Rightarrow n=-1\pm\sqrt{3}$，$n=-1+\sqrt{3}$不符合题意，舍去；

所以，$n\in\left[-1-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,1+\sqrt{3}\right]$.

8. （**广东一模，理16**）已知抛物线$C:x^2=4y$的焦点为F，直线l过点F且倾斜角为$\frac{5\pi}{6}$. 若直线l与抛物线C在第二象限的交点为A，过点A做AM垂直与抛物线C的准线，垂足为M，则$\triangle AMF$外接圆上的点到直线$\sqrt{2}x-y-3=0$的距离的最小值为______.

【答案】$\frac{4\sqrt{2}}{3}$

【解析】（湖北武汉余嘉伦）

直线l方程为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$，联立$\begin{cases}y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1\\x^2=4y\end{cases}\Rightarrow x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-4=0$，解得：$x=-2\sqrt{3}$或$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$（舍）

所以$A(-2\sqrt{3},3)$，$M(-2\sqrt{3},-1)$，$F(0,1)$，设$\triangle AMF$圆心坐标为$H(x,1)$，则$x^2=(x+2\sqrt{3})^2+(1-3)^2$，解得$x=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以$\triangle AMF$外接圆得方程为$\left(x+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2+(y-1)^2=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$，圆上的点到直线$\sqrt{2}x-y-3=0$的最小距离为$d_{\min}=\frac{|-\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{2}-1-3|}{\sqrt{1+2}}-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

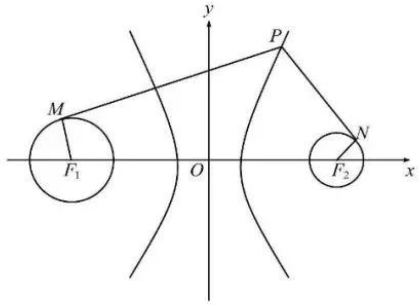
9. （**石家庄模拟，文16**）已知抛物线$C:y^2=8x$的焦点为F，$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$为抛物线C上的三个动点，其中$x_1<x_2<x_3$且$y_2<0$，若F为$\triangle P_1P_2P_3$的重心，记$\triangle P_1P_2P_3$三边P_1P_2，P_1P_3，P_2P_3的中点到抛物线C的准线的距离分别为d_1，d_2，d_3，且满足$d_1+d_3=2d_2$，则$y_2=$______；P_1P_3所在直线的方程为______.（本题第一空2分，第二空3分.）

【答案】-4；$2x-y-2=0$

【解析】（湖北荆州张凡）

由题意知$d_1=\frac{x_1+x_2}{2}+2$，$d_2=\frac{x_1+x_3}{2}+2$，$d_3=\frac{x_2+x_3}{2}+2$，带入$d_1+d_3=2d_2$得$x_1+2x_2+x_3=2(x_1+x_3)$，即$2x_2=x_1+x_3$，由F为$\triangle P_1P_2P_3$的重心，则有$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=2$，$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=0$，即$2x_2=6-x_2$，即$x_2=2$，所以$y_2=-4$，因此有$y_1+y_3=4$，故P_1P_3的中点坐标为$(2,2)$，所在直线的斜率$k=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{8}{y_1+y_3}=2$，故$P_1P_3$所在直线的方程为$2x-y-2=0$.

10. （**池州5月检测，理15**）过双曲线$x^2-\frac{y^2}{48}=1$的右支上一点P，分别向圆$C_1:(x+7)^2+y^2=4$和圆$C_2:(x-7)^2+y^2=1$作切线，切点分别为M，N则$|PM|^2-|PN|^2$的最小值为________.



【答案】25

【解析】(安徽安庆王鹏)

$|PM|^2-|PN|^2=(|PF_1|^2-4)-(|PF_2|^2-1)=(|PF_1|+|PF_2|)(|PF_1|-|PF_2|)-3=2(|PF_1|+|PF_2|)-3$

易知当点 P 运动到实轴端点处时 $(|PF_1|+|PF_2|)$ 取得最小值为 $|F_1F_2|=14$，$|PM|^2-|PN|^2$ 的最小值为 $2\times14-3=25$.

11. (湖北八校第二次联考，理16) 已知不过原点的动直线 l 交抛物线 $C:y^2=2px\ (p>0)$ 于 A，B 两点，O 为坐标原点，且 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，若 $\triangle OAB$ 的面积最小值是 32，则 (1) $p=$______；(2) 直线 l 过定点______.

【答案】$p=2\sqrt{2}$，$(4\sqrt{2},0)$.

【解析】(四川攀枝花王凯)

设直线 l 与抛物线交于 A，B 两点，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，易知 $OA\perp OB$ 可得 $x_1x_2+y_1y_2=0\Rightarrow\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}+y_1y_2=0$，得到 $y_1y_2=-4p^2$，又令 $l:x=my+t$ 代入抛物线 $y^2=2px$ 中，可得方程 $y^2-2pmy-2pt=0$，由韦达定理得 $y_1y_2=-2pt=-4p^2$，$\therefore t=2p$，$\therefore s=\frac{1}{2}\times2p\times|y_1-y_2|=p\sqrt{4p^2m^2+16p^2}=2p^2\sqrt{m^2+4}\geq4p^2$，即 $4p^2=32$ 解得 $p=2\sqrt{2}$ 同时求得定点 $(4\sqrt{2},0)$.

12. (2020重庆康德二诊，文16) 已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，以 F 为圆心、$3p$ 为半径的圆交抛物线 E 于 P，Q 两点，以线段 PF 为直径的圆经过点 $(0,-1)$，则点 F 到直线 PQ 的距离为______.

【答案】$\frac{4}{5}\sqrt{5}$

【解析】(上海奉贤沈健)

由题意知 $|FP|=x_p+\frac{p}{2}=3p$，所以 $x_p=\frac{5}{2}p$，设点 $A(0,-1)$，有题意知 $AP\perp AF$，即 $\frac{1}{\frac{p}{2}}\cdot\frac{y_p+1}{\frac{5p}{2}}=-1$，

所以 $y_p=-\sqrt{5}p$，得 $p=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，所以所求距离为 $\frac{5}{2}p-\frac{1}{2}p=\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

13. (2020马鞍山二模，理16) 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，过 E 的左焦点 $F(-5,0)$ 作直线 l，直线 l 与双曲线 E 分别交于点 A，B，与 E 的两渐近线分别交于点 C，D，若 $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AC}$，则 $|\overrightarrow{BD}|=$______.

【答案】$\frac{5\sqrt{5}}{8}$

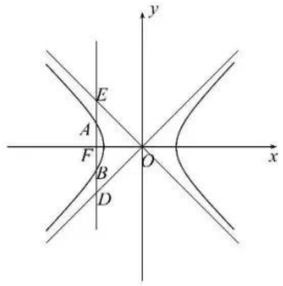
【解析】(四川凉山罗永云)

由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$c=5$，可得 $a=2\sqrt{5}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5}$，则双曲线 $E:\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$，$\therefore$ 渐近线方程为：$y=\pm\frac{1}{2}x$，

压轴小题

设过 $F(-5,0)$ 的直线为：$x=my-5$，联立直线 $y=-\frac{1}{2}x$，可得 $C(-\frac{10}{m+2},\frac{5}{m+2})$，由题意可得 A 为 FC 的中点，可得 $A(\frac{-20-5m}{4+2m},\frac{5}{4+2m})$，将 A 的坐标代入双曲线 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$，可得 $(20+5m)^2-100=80(2+m)^2$，解得 $m=-\frac{2}{11}$ 或 -2（舍），则 $A\left(-\frac{55}{24},-\frac{110}{24}\right)$.联立直线 $x=-\frac{2}{11}y-5$ 与双曲线 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$，可得 $-\frac{480}{121}y^2+\frac{20}{11}y+5=0$，

$\therefore y_Ay_B=-\frac{121\times5}{480}$，则 $B\left(-\frac{29}{6},-\frac{11}{12}\right)$，所以 $|BD|=\sqrt{\left(-\frac{29}{6}+\frac{110}{24}\right)^2+\left(-\frac{11}{12}+\frac{55}{24}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{8}$，故答案为：$\frac{5\sqrt{5}}{8}$.

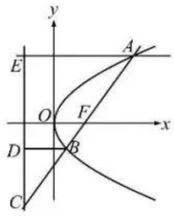


14. （**2020年山东5月质量检测，15**）已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 F 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 交该抛物线于 A，B（点 A 在第一象限），与其准线交于点 C，则 $\frac{|CB|}{|AB|}=$______.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】（江西于都李先源）

由抛物线的性质知 $|AF|=4$，$|BF|=\frac{4}{3}$，$|AB|=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$；过 A，B 分别作准线的垂线如图所示，则 $\frac{|CB|}{|CA|}=\frac{|DB|}{|AE|}=\frac{|BF|}{|AF|}=\frac{1}{3}$，即 $\frac{|CB|}{|CA|}=\frac{1}{3}$，$\frac{|AB|}{|CA|}=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{|CB|}{|AB|}=\frac{1}{2}$.



15. **(2020 青岛 5 月模拟，16)** 已知抛物线 $C:y^2=2px(0<p<6)$ 的准线交圆 $O_1:(x+3)^2+y^2=4$ 于 A，B 两点，若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则抛物线 C 的方程为______，已知点 $M(1,2)$，点 E 在抛物线 C 上运动，点 N 在圆 $O_2:(x-2)^2+y^2=1$ 上运动，则 $|EM|+|EN|$ 的最小值为______.（第一空 2 分，第二空 3 分）

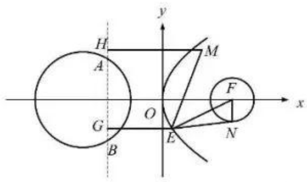
【答案】 $y^2=8x$;2

【解析】（湖北武汉黄祥华）

对圆 O_1，取 AB 中点 M，由垂径定理得 $|O_1M|=1$，又 $0<p<6$，所以准线方程为 $x=-\frac{p}{2}=-2$，所以 $p=4$，抛

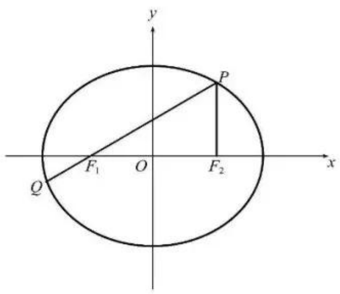
物线的方程为 $y^2=8x$；所以抛物线焦点为 $F(2,0)$，作 $EG\perp AB$ 于 G，$MH\perp AB$ 于 H，连 EF、FN，则

$|EM|+|EN|\ge|EM|+|EF|-|FN|=|EM|+|EG|-1\ge|MH|-1=3-1=2$，当且仅当 M、E、H 三点共线时取等号.



17.（2020莆田市高中毕业班教学质量第二次检测，文16） 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 为椭圆 C 上一点，满足 $\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，直线 PF_1 交椭圆 C 于另一点 Q，且 $\overrightarrow{PF_1}=3\overrightarrow{F_1Q}$，则椭圆 C 的标准方程为______.

【答案】$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.



【解析】（江苏苏州陈海锋）

不妨设点 P 在第一象限，由 $\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$ 知，$PF_2\perp F_1F_2$，则 $P(c,\frac{b^2}{a})$，又 $\overrightarrow{PF_1}=3\overrightarrow{F_1Q}$，则 $\overrightarrow{OQ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OF_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$，

将 $\overrightarrow{OF_1}=(-c,0)$，$\overrightarrow{OP}=(c,\frac{b^2}{a})$ 代入得 $\overrightarrow{OQ}=\left(-\frac{5}{3}c,-\frac{b^2}{3a}\right)$，$\therefore Q\left(-\frac{5}{3}c,-\frac{b^2}{3a}\right)$，代入椭圆方程有 $\frac{(-\frac{5}{3}c)^2}{a^2}+\frac{(-\frac{b^2}{3a})^2}{b^2}=1$，

化简得 $a^2=3c^2$①，又 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，有 $c\times\frac{b^2}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$②，由①②解得 $a^2=3$，$b^2=2$，故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

概率与统计综合

1.（2020马鞍山二模，理11） 设 a，b，$m\in\mathbf{Z}$，$m>0$，若 a 和 b 被 m 除得的余数相同，则称 a 和 b 模 m 同余，记为 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$，已知 $a=1+C_{20}^1\times2+C_{20}^2\times2^2+C_{20}^3\times2^3+\cdots+C_{20}^{20}\times2^{20}$，$b\equiv a(\mathrm{mod}\,10)$，则 b 的值可能是

A．2018　　B．2019　　C．2020　　D．2021

【答案】D

【解析】（四川凉山罗永云）

$a=1+C_{20}^1\times2+C_{20}^2\times2^2+C_{20}^3\times2^3+\cdots+C_{20}^{20}\times2^{20}$，可得 a 被10除得的余数为1，

又 $b\equiv a(\mathrm{mod}\,10)$，则 b 的值可以是2021，故选：D.

压轴小题

2. **（石家庄模拟，理16）**2019年底，武汉发生"新型冠状病毒"肺炎疫情，国家卫健委紧急部署，从多省调派医务工作者前去支援，正值农历春节举家团圆之际，他们成为"最美逆行者"．武汉市从2月7日起举全市之力入户上门排查确诊的新冠肺炎患者、疑似的新冠肺炎患者、无法明确排除新冠肺炎的发热患者和确诊患者的密切接触者等"四类"人员，强化网格化管理，不落一户、不漏一人．若在排查期间，某小区有5人被确认为"确诊患者的密切接触者"，现医护人员要对这5人随机进行逐一"核糖核酸"检测，只要出现一例阳性，则将该小区确定为"感染高危小区"．假设每人被确诊的概率为 $p\,(0<p<1)$ 且相互独立，若当 $p=p_0$ 时，至少检测了4人该小区被确定为"感染高危小区"的概率取得最大值，则 $p_0=$_______．

【答案】$1-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．

【解析】（湖北荆州张凡）

由题意知，至少检测了4人该小区被确定为"感染高危小区"的概率为

$f(p)=p(1-p)^3+p(1-p)^4$，$f'(p)=(1-p)^2(5p^2-10p+2)$，

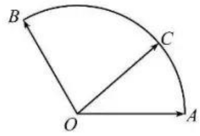
令 $f'(p)=0$，解得 $1-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ $p=1-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，故 $f(p)$ 在 $\left(0,1-\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)$ 上单调递增，

在 $\left(1-\dfrac{\sqrt{15}}{5},1\right)$ 上单调递减，故当 $p=1-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 时，$f(p)$ 取得最大值．

向量综合

1.（东北三省四市二模，理10） 给定两个长度为2的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为$120°$，如图所示，点C在以O为圆心2为半径的圆弧AB上运动，则$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$的最小值为

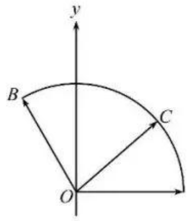
A．-4　　B．-2　　C．0　　D．2



【答案】B

【解析】（黑龙江哈尔滨夏志鹏）

以$\overrightarrow{OA}$为x轴建立直角坐标系，则点$A(2,0)$，点$B(-1,\sqrt{3})$，点C在半径为2的圆上，利用参数设点坐标，故点$C(2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=2-2\cos\alpha-2\sqrt{3}\sin\alpha=2-4\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})$，故$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$的最小值为$-2$

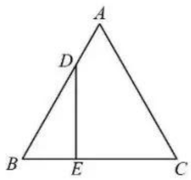


2.（2020深圳线下调研，理15） 已知等边三角形ABC的边长为3，点D，E分别在边AB，BC上，且$AD=\frac{1}{3}AB$，$BE=\frac{1}{3}BC$，则$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DE}$的值为_______.

【答案】3

【解析】（湖北武汉蔡绍明）

$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=3$



3.（广东一模，理15） 已知$A(3,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,2)$，若点P满足$|\overrightarrow{AP}|=1$，则$|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}|$的最大值为______.

【答案】$\sqrt{13}+1$

【解析】（湖北武汉余嘉伦）

设$P(x,y)$，由$|\overrightarrow{AP}|=1$知，点P在圆$(x-3)^2+y^2=1$上. $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}=(x-1,y+3)$，$|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}|^2=(x-1)^2+(y+3)^2=(x-3)^2+y^2+4x+6y+1=4x+6y+2$，设$z=4x+6y+2$，即$y=-\frac{2}{3}x+\frac{z-2}{6}$，当直线截距取最大值时，$z$取得最大值，此时直线$y=-\frac{2}{3}x+\frac{z-2}{6}$与原$(x-3)^2+y^2=1$相切，$\frac{|4\times3+0+2-z|}{\sqrt{4^2+6^2}}=1$

压轴小题

解得 $z_{max}=14+2\sqrt{13}$，所以 $|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}|_{max}=\sqrt{14+2\sqrt{13}}=\sqrt{13}+1$.

4.（**2020佛山二模，理15**）在面积为1的平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$_______；点 P 是直线 AD 上的动点，则 $\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2-\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值为_______.

【答案】 $\sqrt{3}$；$\sqrt{3}$

【解析】（湖北襄阳殷勇）

设 $AB=a$，$AD=b$，则 $S_{ABCD}=ab\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}ab=1$，$\therefore ab=2$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=ab\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.

在 $\triangle PBC$ 中，由余弦定理得 $BC^2=PB^2+PC^2-2PB\cdot PC\cos\angle BPC=\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2-2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$

$\therefore \overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2-\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=BC^2+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=b^2+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$，

过点 P 作 $PQ\perp BC$ 于点 Q，则 $PQ=\dfrac{1}{2}a$，设 $BQ=x$，则 $CQ=b-x$，

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QC}\right)=\overrightarrow{PQ}^2+\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QC}=\dfrac{1}{4}a^2-x(b-x)$

$\therefore \overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2-\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=b^2+\dfrac{1}{4}a^2-x(b-x)\geq b^2+\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{4}b^2=\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{3}{4}b^2\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}ab=\sqrt{3}$.